Секция 3

Актуальные проблемы современной физики, математики и информатики

С. М. БИРУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

СУПЕРПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУАНКАРЕ И БЕНДИКСОНА

В [1–5] обыкновенная автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка была рассмотрена с позиции поведения её траекторий на круге Пуанкаре, сфере Пуанкаре и сфере Бендиксона. Кроме того, в [1–4] рассмотрены вопросы взаимосвязи между поведением траекторий дифференциальной системы и её первой и второй приведённых систем Пуанкаре, а также вопросы топологической эквивалентности дифференциальных систем на сфере Пуанкаре. В [5] установлена взаимосвязь между поведением траекторий дифференциальной системы на сфере Пуанкаре и сфере Бендиксона.

Рассмотрим обыкновенную автономную дифференциальную систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^{n}X_i(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=\sum_{i=0}^{n}Y_i(x,y)\,, \tag{1}$$

где $X_i:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ и $Y_i:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ – однородные полиномы i-й степени с коэффициентами из поля $\mathbf{R}$. При этом $|X_n(x,y)|+|Y_n(x,y)|\neq 0$ на $\mathbf{R}^2$, что соответствует тому, что хотя бы одна из производных представляется полиномом n-й степени.

Предложение 1. *В результате суперпозиции первого преобразования Пуанкаре и преобразования Бендиксона, или преобразования*

$$x=(x_4^2+y_4^2)(4x_4)^{-1},\qquad y=y_4x_4^{-1}, \tag{2}$$

система (1) *приводится к полиномиальной системе*

$$\begin{aligned}\frac{dx_4}{d\tau_4}&=4x_4^2\sum_{i=0}^{n}(4x_4)^{n-i}X_i(x_4^2+y_4^2,4y_4)-\\&\quad-2x_4^2y_4\sum_{i=0}^{n}(4x_4)^{n-i}Y_i(x_4^2+y_4^2,4y_4),\\\frac{dy_4}{d\tau_4}&=4x_4y_4\sum_{i=0}^{n}(4x_4)^{n-i}X_i(x_4^2+y_4^2,4y_4)+\\&\quad+x_4(x_4^2-y_4^2)\sum_{i=0}^{n}(4x_4)^{n-i}Y_i(x_4^2+y_4^2,4y_4),\end{aligned} \tag{3}$$

где $(x_4^2+y_4^2)(4x_4)^n\,d\tau_4=dt$.

Предложение 2. *В результате суперпозиции второго преобразования Пуанкаре и преобразования Бендиксона, или преобразования*

$$x=x_5y_5^{-1},\qquad y=(x_5^2+y_5^2)(4y_5)^{-1}, \tag{4}$$

система (1) *приводится к полиномиальной системе*

$$\begin{aligned}\frac{dx_5}{d\tau_5} &= y_5(y_5^2 - x_5^2)\sum_{i=0}^{n}(4y_5)^{n-i}X_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2) + \\ &+ 4x_5y_5\sum_{i=0}^{n}(4y_5)^{n-i}Y_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2), \\ \frac{dy_5}{d\tau_5} &= -2x_5y_4^2\sum_{i=0}^{n}(4y_5)^{n-i}X_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2) + \\ &+ 4y_5^2\sum_{i=0}^{n}(4y_5)^{n-i}Y_i(4x_5, x_5^2 + y_5^2),\end{aligned} \tag{5}$$

где $(x_5^2 + y_5^2)(4y_5)^n d\tau_5 = dt$.

Предложение 3. *В результате суперпозиции преобразования Бендиксона и первого преобразования Пуанкаре, или преобразования*

$$x = 4x_6y_6(1 + x_6)^{-1}, \qquad y = 4y_6(1 + x_6)^{-1}, \tag{6}$$

система (1) *приводится к полиномиальной системе*

$$\begin{aligned}\frac{dx_6}{d\tau_6} &= (1 + x_6^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + x_6^2)^{n-i}X_i(4x_6y_6, 4y_6) - \\ &- x_6(1 + x_6^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + x_6^2)^{n-i}X_i(4x_6y_6, 4y_6), \\ \frac{dy_6}{d\tau_6} &= 2x_6y_6\sum_{i=0}^{n}(1 + x_6^2)^{n-i}X_i(4x_6y_6, 4y_6) + \\ &+ y_6(1 - x_6^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + x_6^2)^{n-i}X_i(4x_6y_6, 4y_6),\end{aligned} \tag{7}$$

где $4y_6(1 + x_6^2)^n d\tau_6 = dt$.

Предложение 4. *В результате суперпозиции преобразования Бендиксона и второго преобразования Пуанкаре, или преобразования*

$$x = 4x_7(1 + y_7^2)^{-1}, \qquad y = 4x_7y_7(1 + y_7^2)^{-1}, \tag{8}$$

система (1) *приводится к полиномиальной системе*

$$\begin{aligned}\frac{dx_7}{d\tau_7} &= x_7(1 - y_7^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + y_7^2)^{n-i}X_i(4x_7, 4x_7y_7) + \\ &+ 2x_7y_7\sum_{i=0}^{n}(1 + y_7^2)^{n-i}Y_i(4x_7, 4x_7y_7), \\ \frac{dy_7}{d\tau_7} &= -y_7(1 + y_7^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + y_7^2)^{n-i}X_i(4x_7, 4x_7y_7) + \\ &+ (1 + y_7^2)\sum_{i=0}^{n}(1 + y_7^2)^{n-i}Y_i(4x_7, 4x_7y_7),\end{aligned} \tag{9}$$

где $4x_7(1 + y_7^2)^n d\tau_7 = dt$.

Свойство 1. *Преобразования* (2) *и* (8) *взаимно обратны.*

Свойство 2. *Преобразования* (4) *и* (6) *взаимно обратны.*

В продолжение [1–5] установлены свойства взаимосвязи между поведением траекторий дифференциальной системы (1) и систем (3), (5), (7), (9), полученных из неё в результате суперпозиции преобразований Пуанкаре и Бендиксона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.

2. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько. – Минск, 2001. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.05.2001, № 1363-В2001 // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.

3. Горбузов, В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. − 2011. − № 2(111). − С. 15−26.

4. Горбузов, В.Н. Траектории проективно приведенных дифференциальных систем / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2012. – № 1(126). – С. 39–52.

5. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.