

Н. В. ГУЦКО¹, Ю. В. ЛУЦЕНКО²

¹МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

²БГУ им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

О СТРОЕНИИ ГРУПП ШМИДТА С ОБОБЩЕННО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПЕРВЫМИ И ЧЕТВЕРТЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все группы в данной статье являются конечными. Напомним ряд понятий, используемых в данной работе. Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. *Группа Шмидта* – это конечная нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB=BA$. Подгруппа H группы G называется *X-перестановочной* в G или *обобщенно перестановочной* [1], где X – непустое подмножество группы G , если для любой подгруппы T из G найдется такой элемент x из X , что $Hx^T = T^x H$.

Результат, полученный в работе [2] В. Хуппертом, дал толчок большому числу исследований, в которых изучалось влияние максимальных подгрупп силовских подгрупп на строение основной группы (см. подробный обзор [3]). В данной работе приводится описание структуры групп Шмидта, в которых каждая максимальная подгруппа (обобщенно) перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой, с доказательствами теорем и другими результатами в данном направлении можно ознакомиться в работе [4].

Теорема 1. Пусть $G=[P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из G , когда либо $|G|=p^\alpha q^\beta$ для $\alpha+\beta\leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов:

- (1) G – сверхразрешимая группа Шмидта;
- (2) $G=[P]Q$, где $|Q|=q^2$, $|\Phi(P)|\leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P ;
- (3) $G=[P]Q$, где $|Q|=q$, $|\Phi(P)|\leq p^2$ и $P_3\subseteq\Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P .

Теорема 2. Пусть $G=[P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая максимальная подгруппа $F(G)$ -перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из G , когда либо $|G|=p^\alpha q^\beta$ для $\alpha+\beta\leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов:

- (1) G – сверхразрешимая группа Шмидта;
- (2) $G=[P]Q$, где $|Q|=q^2$, $|\Phi(P)|\leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P ;
- (3) $G=[P]Q$, где $|Q|=q$, $|\Phi(P)|\leq p^2$ и $P_3\subseteq\Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P .

Следствие. Пусть G – группа Шмидта и $X=F(G)$ – ее подгруппа Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми ее 4-максимальными подгруппами;
- (2) каждая максимальная подгруппа группы G X -перестановочна со всеми ее 4-максимальными подгруппами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. H -permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2003. – № 4 (19). – С. 37–39.
2. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.
3. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 12–32.
4. Гуцко, Н.В. Строение групп Шмидта с обобщенно перестановочными первыми, вторыми и четвертыми максимальными подгруппами / Н.В. Гуцко, Ю.В. Луценко // Вестник ПГУ. Серия С. Фундаментальные науки. – 2011. – № 12. – С. 67–72