

МГПУ им. И.П. Шамякина

МАТЕМАТИКА

**Справочные
материалы**

ISBN 978-985-477-966-9



9 789854 779669

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

МГПУ им. И. П. Шамякина

Мозырь
МГПУ им. И. П. Шамякина
2025

УДК 51(078)
ББК 22.2я73
М34

Составитель:

С. Р. Бондарь, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики УО МГПУ им. И. П. Шамякина

Рецензенты:

кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора по учебно-воспитательной и идеологической работе
Российского государственного социального университета
(филиал в г. Минске)

В. В. Пакутайте;

кандидат физико-математических наук, доцент,
заместитель заведующего центром диагностических систем
Института физики НАН Беларуси

И. И. Ропот

Печатается по решению редакционно-издательского совета
УО «Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина»

Математика : справочные материалы / сост. С. Р. Бондарь. –
М34 Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2025. – 40 с.
ISBN 978-985-477-966-9.

Справочные материалы содержат теоретические сведения по основным вопросам высшей математики для студентов инженерно-педагогических специальностей. Материал разработан в соответствии с учебной программой по математике и предназначен для организации подготовки студентов специальностей 6-05-0719-01 «Инженерно-педагогическая деятельность», профилизация: «Строительство», 6-05-0719-01 «Инженерно-педагогическая деятельность», профилизация: «Машиностроение».

УДК 51(078)
ББК 22.2я73

ISBN 978-985-477-966-9

© Бондарь С. Р., составление, 2025
© УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	6
1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей.....	6
1.2. Обратные матрицы. Элементарные преобразования. Теорема Кронкера-Капелли.....	8
1.3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	10
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.....	12
2.1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора	12
2.2. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения.....	15
2.3. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения.....	16
3. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ	19
3.1. Числовые множества. Определение и способы задания функции	19
3.2. Пределы последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей.....	21
4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ.....	22
4.1. Производная, ее геометрический и физический смысл. Правила и формулы дифференцирования.....	22
4.2. Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения	25
4.3. Исследование поведения функций и их графиков	27
4.4. Схема полного исследования функции и построение её графика.....	30
4.5. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии	31
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	34
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	36
ПРИЛОЖЕНИЕ А	37

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика является средством познания закономерностей окружающего мира и раскрытия путей их использования в практической деятельности будущего специалиста. Используя обобщенные понятия, термины и символы, она позволяет исследовать самые различные явления и процессы. Качественная математическая подготовка современного специалиста является требованием времени, что обусловлено стремительным развитием и внедрением информационных технологий, проникновением математических методов в исследовательскую и производственную деятельность инженера.

Учебная дисциплина «Математика» является базой, на которой строится большинство изучаемых в дальнейшем естественнонаучных и технических дисциплин. Эта дисциплина позволяет анализировать данные, выявлять закономерности и строить точные модели, которые предсказывают поведение реальных систем. Это необходимо для проектирования надежных и эффективных устройств и сооружений.

Целью дисциплины «Математика» является обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, методам обработки и анализа результатов численных экспериментов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен *владеть*:

- методами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем;
- методами решения линейных систем уравнений и линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами;
- теорией устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений;
- практическими навыками построения и анализа математических моделей физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями.

Реализации поставленной цели может служить данное издание, назначение которого – помочь студентам быстро найти или восстановить в памяти необходимые формулы данной дисциплины, что будет способствовать подготовке к практическим занятиям. Чтобы быстро найти нужную тему, можно воспользоваться предметным указателем. Для эффективной подготовки к различным формам контроля (зачет, экзамены) предлагается примерный перечень вопросов (приложение А).

Справочное издание содержит основные теоретические сведения по разделу «Математика», которые целесообразно использовать в учебном процессе по подготовке специалистов по специальностям 6-05-0719-01 «Инженерно-педагогическая деятельность», профилизация: «Строительство», 6-05-0719-01 «Инженерно-педагогическая деятельность», профилизация: «Машиностроение».

МГТУ им. И.П. Шамякина

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей

Определителем n -го порядка называется число Δ_n , записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), которые называются элементами определителя (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, j – номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Любую строку или столбец этой таблицы будем называть рядом.

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ -го порядка Δ_{n-1} , полученный из определителя n -го порядка Δ_n вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Основные свойства определителей:

1) сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=0}^n a_{kj} A_{kj} \quad (1.2)$$

Эти равенства можно было бы принять за правило вычисления определителя. Первое из них называется *разложением Δ_n по элементам i -й строки*, а второе – *разложением Δ_n по элементам j -го столбца*;

2) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами и наоборот;

3) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;

4) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю;

5) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ , то определитель Δ_n умножится на это же число λ ;

6) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;

7) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;

8) сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j)$$

Основные операции над матрицами.

1. *Сложение и вычитание матриц.* Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. Суммой (разностью) матриц A и B , обозначаемой $A+B$ ($A-B$), называется матрица C , элементами которой выступают $C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} – соответственно элементы матриц A и B .

2. *Умножение матрицы на число.* Произведением матрицы A и числа λ , обозначаемым λA , называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы A , т. е. при умножении

матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число.

3. *Умножение матриц.* Произведением матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p} = A \cdot B$ (или просто AB), элементы которой $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$, где a_{ik} , b_{kj} – элементы матриц A и B . Отсюда следует, что произведение AB существует только в случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B . Далее число строк матрицы AB равно числу строк A , а число столбцов – числу столбцов B . Из существования произведения AB не следует существование произведения BA . В случае его существования, как правило, $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*). Известно, что всегда $(AB)C = A(BC)$.

1.2. Обратные матрицы. Элементарные преобразования. Теорема Кронкера-Капелли

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

называется *невырожденной*, если ее определитель (детерминант)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.4)$$

В случае, когда $\det A = 0$, матрица A называется *вырожденной*.

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы A^{-1} . Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной

невырожденной матрицы A , если $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Известно, что для A существует единственная обратная матрица A^{-1} , которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.7)$$

была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.7^*)$$

системы (1.7) и ранг так называемой расширенной матрицы

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \end{array} \right]$$

системы (1.7) были равны, т. е. $\text{rang } A = \text{rang } B = r$. Далее, если $\text{rang } A = \text{rang } B$ и $r = n$, то система (1.7) имеет единственное решение; если $r < n$, то система (1.7) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $n - r$ произвольных параметров.

1.3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Матричный метод. Пусть для системы (1.7) $m = n$ и основная матрица A вида – невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой (1.7). Введем в рассмотрение матрицы-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Тогда систему (1.8) можно записать в матричной форме: $AX = \tilde{B}$.

Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1} , получим $A^{-1}AX = A^{-1}\tilde{B}$, откуда $EX = X = A^{-1}\tilde{B}$. Следовательно, матрица-решение X легко находится как произведение A^{-1} и \tilde{B} .

Формула Крамера. Если для системы (1.8) $m = n$ и $\det A \neq 0$, то верны формулы Крамера для вычисления неизвестных x_i ($i = \overline{1, n}$):

$$x_i = \frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1.9)$$

где $\Delta_n = \det A$, а $\Delta_n^{(i)}$ являются определителями n -го порядка, которые получаются из Δ_n путем замены в нем i -го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса. Если основная матрица A системы (1.7) имеет ранг $r \leq n$, то расширенная матрица B этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right] \quad (1.10)$$

Матрица (1.10) является расширенной матрицей системы

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots \\ x_r + \dots + \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\ 0 = \tilde{b}_{r+1}, \\ \dots \\ 0 = \tilde{b}_m \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

которая эквивалентна исходной системе (т. е. имеет те же самые решения, что и исходная система). Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.11) и, следовательно, исходная система (1.7) несовместны. Если же $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.7) совместна, а из системы (1.11) можно последовательно выразить в явном виде базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ через свободные неизвестные x_{r+1}, \dots, x_n , т.е. решить систему (1.8). Если $r = n$, то решение этой системы единственно.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора

Вектором называют направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A , а конец – в точке B , то вектор обозначается \overrightarrow{AB} . Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , ... На рисунке направление вектора изображается стрелкой (рисунок 1).

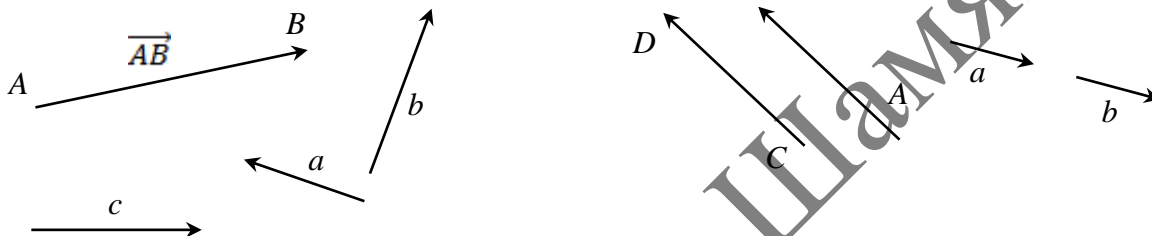


Рисунок 1 – Направление вектора



Рисунок 2 – Пары равных векторов

Через \overrightarrow{BA} обозначают вектор, направленный противоположно вектору \overrightarrow{AB} . Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$. Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. *Длиной* или *модулем вектора* называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ (или AB) и $|a|$ (или a) обозначают модули векторов \overrightarrow{AB} и \mathbf{a} соответственно.

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они *коллинеарные*, одинаково направлены и равны по длине. На рисунке 2 изображены пары равных векторов $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{CD}|$, \mathbf{a} и \mathbf{b} : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Из определения равенства векторов следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, не нарушая их равенства. Такие векторы называются *свободными*.

К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора \mathbf{a} и числа α называется вектор, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ (или $\mathbf{a}\alpha$), модуль которого равен $|\alpha||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора \mathbf{a} , если $\alpha > 0$, и противоположно ему, если $\alpha < 0$.

Суммой векторов \mathbf{a}_i ($i = \overline{1, n}$) называется вектор, обозначаемый $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$, начало которого находится в начале первого вектора \mathbf{a}_1 , а конец – в конце последнего вектора \mathbf{a}_n ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов (рисунок 3).

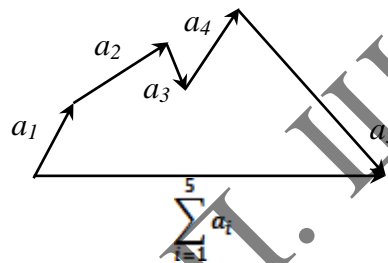


Рисунок 3 – Последовательное сложение векторов

Это правило сложения называется *правилом замыкания ломаной*. В случае суммы двух векторов оно равносильно правилу параллелограмма (рисунок 4).

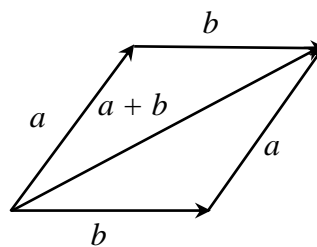


Рисунок 4 – Сложение векторов по правилу параллелограмма

Прямая l с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью l* .

Проекцией вектора \mathbf{a} на ось l называется число, обозначаемое $pr_l \mathbf{a}$ и равное $|\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) – угол между положительным

направлением оси l и направлением вектора \mathbf{a} , т. е. по определению $pr_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$. Геометрическую проекцию вектора \mathbf{a} можно охарактеризовать длиной отрезка MN , взятой со знаком «+», если $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, и со знаком «-», если $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ (рисунок 5). При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ отрезок MN превращается в точку и $pr_l \mathbf{a} = 0$.

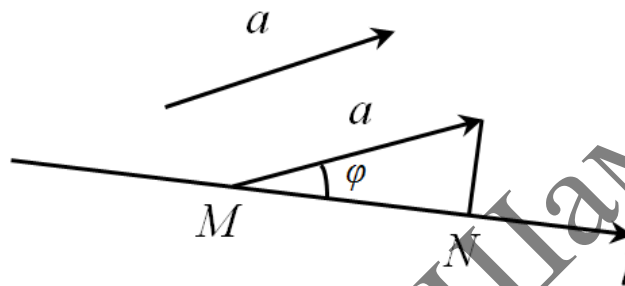


Рисунок 5 – Проекция вектора на ось

Координатами вектора \mathbf{a} называются его проекции на оси координат Ox , Oy , Oz . Они обозначаются соответственно буквами x , y , z . Запись $\mathbf{a} = (x, y, z)$ означает, что вектор \mathbf{a} имеет координаты x , y , z .

Для равенства векторов необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были равны. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Линейной комбинацией векторов \mathbf{a}_i называется вектор \mathbf{a} , определяемый по формуле $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$, где λ_i – некоторые числа. Если векторы \mathbf{a}_i определяются координатами x_i, y_i, z_i , то для координат вектора \mathbf{a} имеем: $\mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right)$.

2.2. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 , называется число λ , удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задаётся равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda > 0$, и *внешним*, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2 , $\lambda \neq -1$.

Скалярным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется число, обозначаемое $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

где (\mathbf{a}, \mathbf{b}) обозначает меньший угол между направлениями векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Отметим, что всегда $0 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$.

Перечислим основные свойства скалярного произведения векторов:

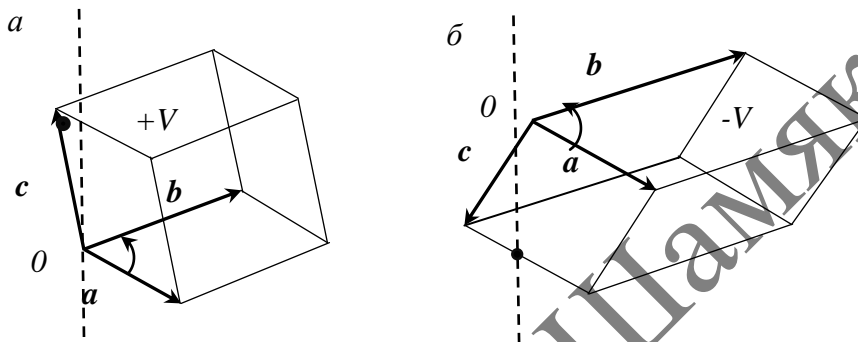
- 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- 2) $\lambda(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$;
- 3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
- 4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{np}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{np}_b \mathbf{a}$;
- 5) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;
- 6) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Работа силы F , равной произведению этой силы на перемещение тела на путь $|s|$, определяется вектором s и вычисляется по формуле:

$$A = F \cdot s = |F| |s| \cdot \cos(F, s).$$

2.3. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения

Упорядоченная тройка некопланарных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора \mathbf{a} к вектору \mathbf{b} наблюдается из конца вектора \mathbf{c} происходящим против движения часовой стрелки (рисунок 6, а). В противном случае эта тройка называется *левой* (рисунок 6, б).



а) правая тройка, б) левая тройка

Рисунок 6 – Упорядоченная тройка некопланарных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} с общим началом в точке O

Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , обозначаемый $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям (рисунок 7):

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

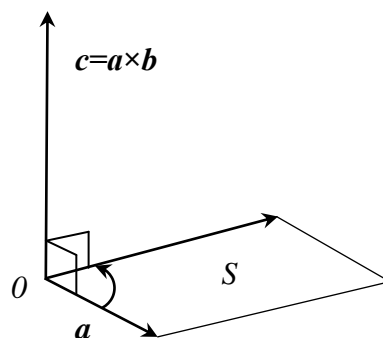


Рисунок 7 – Площадь параллелограмма

Перечислим *основные свойства векторного произведения векторов*:

$$1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a});$$

$$2) (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b});$$

$$3) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$4) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b};$$

5) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , имеющих общее начало в точке O (см. рисунок 7).

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ выражается через координаты векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

С помощью векторного произведения можно вычислить вращающий момент M силы F , приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A : $M = \overline{AB} \times F$ (рисунок 8).

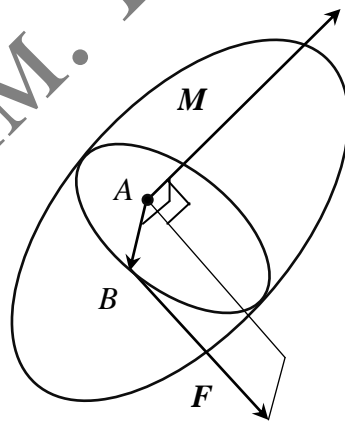


Рисунок 8 – Определение вращающего момента M силы F , приложенной к точке B тела

Смешанным произведением векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} называется число $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Перечислим основные свойства смешанного произведения векторов:

1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, поэтому смешанное произведение можно обозначать проще: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$;

2) $abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb$;

3) Геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $abc = \pm V$, где V – общий параллелепипед, построенный на перемноженных векторах, взятый со знаком «+», если тройка векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} – правая, или со знаком «-», если она левая (см. рисунок б);

4) $abc = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны.

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

МГТУ им. И.П. Шамякина

3. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

3.1 Числовые множества. Определение и способы задания функции

Совокупность рациональных \mathbf{Q} и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел \mathbf{R} . Между множеством точек прямой и множеством \mathbf{R} всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Если это соответствие установлено, то прямую называют *числовой осью*. Совокупность всех чисел x , удовлетворяющих условию $a < x < b$ ($a \ll x \ll b$), называется *интервалом (отрезком)* и обозначается $(a;b)$ ($|a;b|$).

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых действительных чисел a и b верно неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y , то говорят, что задана функция $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Множество D называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых функцией y , называется *областью ее значений (изменения)* и обозначается буквой E . В дальнейшем будем считать множества D и E числовыми, т. е. будем рассматривать числовые функции (если не оговорено противное). В качестве D и E могут быть взяты отрезок $[a;b]$, интервал $(a;b)$, полуинтервал $(a;b]$ или $[a;b)$, отдельные точки числовой оси, а также вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

Основными способами задания функций являются: табличный, графический, аналитический. При аналитической записи функции $y = f(x)$ часто не указываются области D и E , но они естественным образом определяются из свойств функции $f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область E , то можно однозначно выразить x

через $y: x = g(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Для функции $x = f(y)$ E является областью определения, а D – областью значений. Так как $g(f(x)) \equiv x$, и $f(g(y)) \equiv y$, то функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – взаимно обратные. Обратную функцию $x = g(y)$ обычно переписывают в стандартном виде: $y = g(x)$, поменяв x и y местами. Взаимно обратными являются пары функций: $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$, $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, для которых области определения соответственно следующие: $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in (-\infty; +\infty)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in (0; +\infty)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in [-1; +1]$.

Если функция $u = \varphi(x)$ определена на области D , G – ее область значений, функция $y = f(u)$ определена на области G , то функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной функцией f и φ , или функцией f от функции φ . Функцию $y = f(\varphi(x))$ называют *композицией двух функций* – $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Сложная функция может быть композицией большего числа функций: трех, четырех и т. д.

Функции вида $y = f(x)$ называются *явными*. Уравнение вида $F(x, y) = 0$ также задает, вообще говоря, функциональную зависимость между x и y . В этом случае по определению y является *неявной функцией* x .

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы $y = x$.

К основным элементарным функциям относятся пять классов функций: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические.

3.2. Пределы последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $N > 0$, где N – целое, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если A – предел последовательности $\{x_n\}$, то это записывается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (в точке $x = x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если A – предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то пишут: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. В самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не существовать, ($f(x_0)$ не определена). Аналогично запись $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x < x_0}} f(x)$, который обозначают также $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$, то он называется *пределом слева функции* $f(x)$ в точке x_0 . Аналогично, если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x < x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$), то он называется *пределом справа функции* $f(x)$ в точке x_0 . Пределы слева и справа называются *односторонними*. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т. е. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Производная, ее геометрический и физический смысл. Правила и формулы дифференцирования

Напомним, что *приращением функции* $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx – приращение аргумента x . Из рисунка 9 видно, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

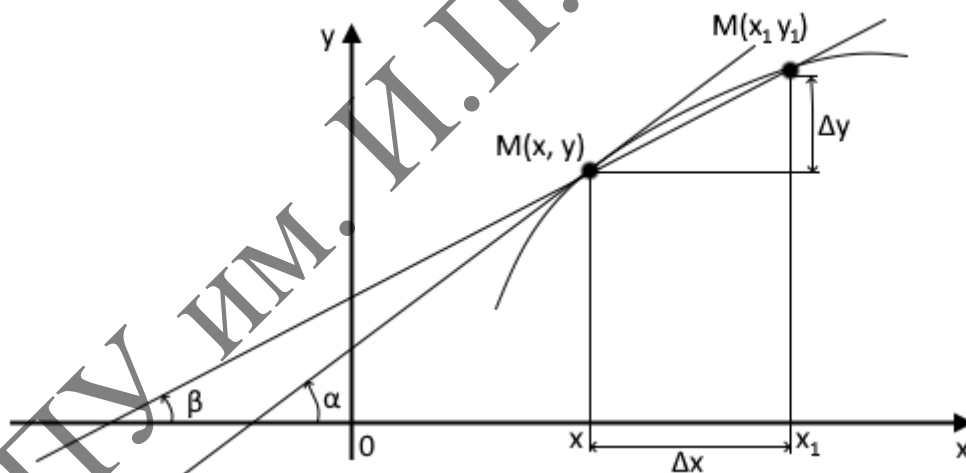


Рисунок 9 – Приращение функции

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается одним из символов: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если указанный в формуле предел существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке x* , а операцию нахождения производной y' – *дифференцированием*.

Если C – постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;

7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная $y = f(u)$, из дифференцируемых функций, то: $y'_x = y'_u u'_x$ или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$.

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций*:

1) $(u^a)' = au^{a-1}u' \quad (a \in R)$;

$$2) (a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$3) (e^u)' = e^u u';$$

$$4) (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u';$$

$$5) (\ln u)' = \frac{1}{u} u';$$

$$6) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$7) (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$8) (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u';$$

$$9) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$$

$$10) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$11) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$12) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$13) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u';$$

$$14) (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$$

$$15) (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$$

$$16) (\operatorname{th} u)' = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u';$$

$$17) (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u';$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в той же точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Таким образом, не всякая функция, непрерывная в некоторой точке x , дифференцируема в этой точке. Но легко показать, что любая функция непрерывна во всех тех точках x , в которых она дифференцируема.

4.2. Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения

Дифференциалом первого порядка функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x . Дифференциал dy функции равен произведению её производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = y'dx = f'(x)dx.$$

Поэтому справедливо равенство

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Из рисунка 10 видно, что если MN – дуга графика функции $y = f(x)$, MT – касательная, проведенная к нему в точке $M(x, y)$, и $AB = \Delta x = dx$, то $CT = dy$, а отрезок $CN = \Delta y$. Дифференциал функции dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx .

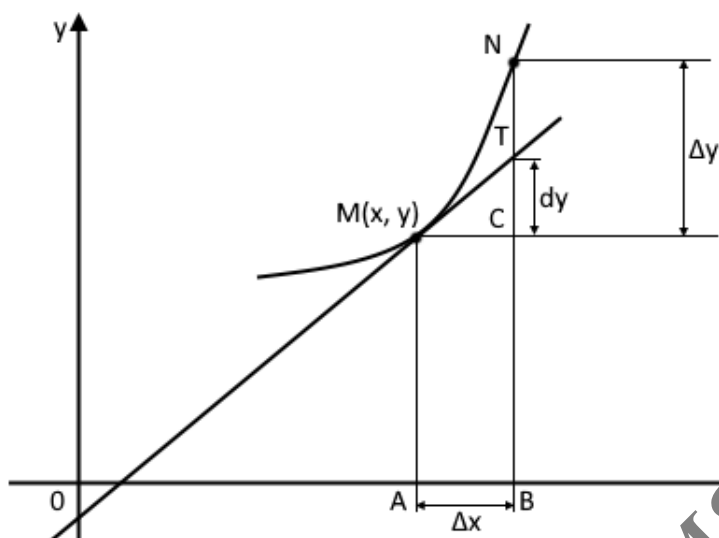


Рисунок 10 – Касательная к графику функции

Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем ($u = u(x), v = v(x)$)

- 1) $dC = 0$ ($C = const$);
- 2) $dx = \Delta x$ если x – независимая переменная;
- 3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- 4) $d(uv) = v du + u dv$;
- 5) $d(Cu) = C du$;
- 6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ ($v \neq 0$);
- 7) $df(u) = f'_u(u) u' dx = f'(u) du$.

Эти основные правила позволяют находить дифференциал функции.

4.3. Исследование поведения функций и их графиков

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приёмов исследования поведения функций.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (или меньшее) значение функции, т. е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Перечислим признаки возрастания (убывания) функции:

1. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ возрастает (убывает), то её производная на этом отрезке неотрицательна (не положительна), т. е.: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

2. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, в некотором интервале, если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Характер монотонности может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими*.

Точка x_1 называется *точкой локального максимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка x_2 называется *точкой локального минимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции – ее *экстремальными значениями*.

Теорема 1 (необходимый признак экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox .

Не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Однако если в какой-либо точке функция достигает экстремума, то эта точка всегда является критической.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Теорема 2 (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет минимум.

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки $x = x_0$. Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью первой производной может быть записана в виде таблицы.

Знаки $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0			Характер критической точки
$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	
+	$f'(x) = 0$ или не существует	-	Точка максимума
-	$f'(x) = 0$	+	Точка минимума
+	$f'(x) = 0$	+	Экстремума нет (функция возрастает)
-	$f'(x) = 0$	-	Экстремума нет (функция убывает)

Теорема 3 (второй достаточный признак локального экстремума функция). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

На отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ может достигать *наименьшего* ($y_{\text{наим}}$) или *наибольшего* ($y_{\text{наиб}}$) значения либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a; b)$, либо на концах отрезка $[a; b]$.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется *выпуклой* в интервале $(a; b)$, если все точки кривой лежат не выше любой её касательной в этом интервале, и *вогнутой* в интервале $(a; b)$, если все её точки лежат не ниже любой её касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отдаляющаяся выпуклой её частью от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), то кривая $y = f(x)$ в этом интервале *выпукла (вогнута)*.

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 5 (достаточный признак точки перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ – *точка перегиба*.

Прямая L называется *асимптотой* данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определений следует, что асимптоты

могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далёкие точки («неограниченные» кривые).

Если существуют точки $x = x_i$ ($i = 1, n$), при которых $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x) = \pm\infty$, т. е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x = x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

то прямые $y = kx + b$ – наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ (при $k = 0$ – горизонтальные). При $x \rightarrow \pm\infty$ можем найти к двум значениям для k . Если имеем одно значение для k , то при $x \rightarrow \pm\infty$ можем получить два значения для b .

4.4. Схема полного исследования функции и построение её графика

Для полного исследования функции $y = f(x)$ и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат;
- 3) найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$);
- 4) выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида;
- 5) найти асимптоты графика функции;
- 6) найти интервалы монотонности функции;
- 7) найти экстремумы функции;
- 8) найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например, пункты 1, 2, 7. Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех восьми операций, то можно

дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

4.5. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии

Дифференциал ds длины дуги s плоской линии, заданной уравнением $y = f(x)$, выражается формулой

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если линия задана уравнением $x = \varphi(y)$, то

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Если линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Кривизной K любой плоской линии в точке M называется предел модуля отношения изменения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N линии (угла смежности) к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \rightarrow M$, то есть по определению

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

где α – угол наклона касательной в точке M к оси Ox (рисунок 11).

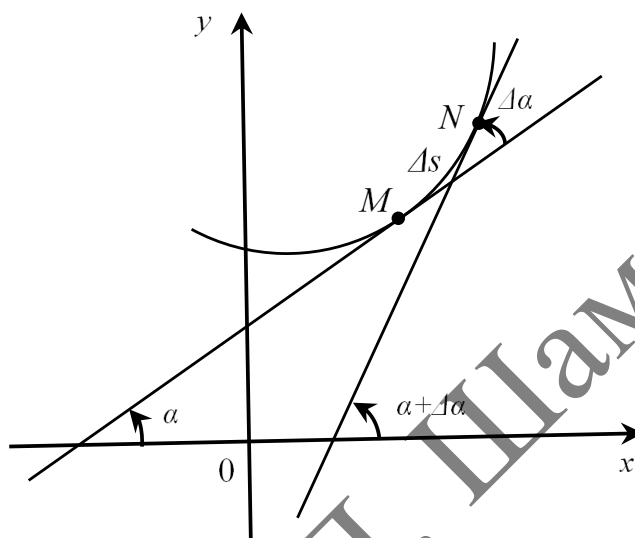


Рисунок 11 – Кривизна функции

Радиусом кривизны называется величина R , обратная кривизне K линии, то есть $R = \frac{1}{K}$. Например, для окружности $K = \frac{1}{R}$, где R – радиус окружности; для прямой $K = 0$. Для произвольной линии кривизна, вообще говоря, не является постоянной величиной.

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то кривизна в любой её точке вычисляется по формуле

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}},$$

В случае параметрического задания линии $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ для вычисления кривизны применяется формула

$$K = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

где производные берутся по параметру t .

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$,
то

$$K = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}},$$

где производные вычисляются по полярному углу φ .

МГТУ им. И.П. Шамякина

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и геометрия : курс лекций : в 2 ч. / автор-составитель И. Н. Кралевиц. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2010. – Ч. 1. – 136 с.

2. Кралевиц, И. Н. Алгебра и геометрия : курс лекций : в 2 ч. / автор-составитель И. Н. Кралевиц. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П. Шамякина, 2009. – Ч. 2. – 98 с.

3. Гуцко, Н. В. Математический анализ. Лекции: 1 семестр : рабочая тетрадь для студентов учреждений высшего образования / Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2020. – 147 с.

4. Справочные материалы по дисциплине «Математический анализ». Раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной действительной переменной» / [составители: Н. В. Гуцко, С. В. Игнатович]. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2020. – 51 с.

5. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие для студентов технических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования / [А. П. Рябушко и др.] ; под общей редакцией А. П. Рябушко. – Мн. : Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 303 с.

6. Расолько, Г. А. Аналитическая геометрия: практикум с использованием MathCad : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям / Г. А. Расолько, Ю. А. Кремень. – Мн. : Вышэйшая школа, 2019. – 271 с.

7. Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии : учебное пособие / Р. Ф. Апатенок. – Мн. : Вышэйшая школа, 1990. – 286 с.

8. Кононов, С. Г. Введение в математику : учебное пособие для механико-математического факультета специальности G 31 03 01 «Математика» : в 3 ч. / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. – Мн. : БГУ, 2003. – Ч. 1 : Множества и функции. – 171 с.

9. Бугров, Я. С. Высшая математика: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим специальностям : [в 3 т.] / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Изд. 6-е,

стереотипное. – М. : Дрофа, 2004. – Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисление. – 257 с.

10. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 689 с.

11. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : учебник для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. 2. – 585 с.

МГТУ им. И.П. Шамякина

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор *12*
- Векторное произведение векторов *16*
- Длина (модуль) вектора *12*
- Дифференциал первого порядка функции *25*
- Интервал монотонности *27*
- Координата вектора *14*
- Линейная комбинация векторов *14*
- Матрица вырожденная *8*
- Матрица невырожденная *8*
- Матричный метод *10*
- Метод последовательных исключений Жордана–Гаусса *11*
- Модуль *19*
- Основные операции над матрицами *7*
- Основные свойства определителей *6*
- Основные свойства векторного произведения векторов *17*
- Основные свойства скалярного произведения векторов *15*
- Основные свойства смешанного произведения векторов *18*
- Правила дифференцирования *23*
- Предел числовой последовательности *21*
- Признаки возрастания (убывания) функции *27*
- Приращение функции *22*
- Проекция вектора на ось *13*
- Радиус кривизны *32*
- Скалярное произведение двух векторов *15*
- Смешанное произведение векторов *17*
- Сумма векторов *13*
- Схема исследования функции *28*
- Таблица производных основных элементарных функций *23*
- Теорема Кронекера-Капелли *9*
- Точки экстремума функции *27*
- Угол между кривыми в точке пересечения *25*
- Уравнение касательной *24*
- Уравнение нормали *25*
- Формула Крамера *10*

ПРИЛОЖЕНИЕ А**Примерный перечень вопросов к экзаменам и зачету****1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии**

1. Операции над матрицами.
2. Вычисление определителей.
3. Нахождение обратной матрицы.
4. Решение невырожденных систем.
5. Определение ранга матрицы.
6. Решение произвольных систем.
7. Решение однородных систем.
8. Скалярное и векторное произведение.
9. Смешанное произведение.
10. Решение задач на плоскость в пространстве.
11. Решение задач на прямую.
12. Решение задач на кривые второго порядка.
13. Поверхности второго порядка.

2. Введение в математический анализ

1. Нахождение пределов функций.
2. Нахождение пределов с помощью замечательных пределов.
3. Исследование функций на непрерывность.
4. Контрольная работа.
5. Дифференцирование функций.
6. Дифференцирование функций, заданных неявно.
7. Нахождение дифференциала функции.
8. Производственные и дифференциалы высших порядков.
9. Нахождение пределов с помощью правила Лопиталья.
10. Экстремум функции, монотонность.
11. Точки перегиба, выпуклость и вогнутость кривой.
12. Асимптоты.
13. Исследование функции.

3. Неопределённый интеграл

1. Замена переменной в неопределённом интеграле.
2. Интегрирование по частям.
3. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби.
4. Интегрирование рациональных дробей.

5. Интегрирование тригонометрических функций.

6. Интегрирование иррациональных функций.

4. Определённый интеграл

1. Вычисление определённого интеграла.

2. Нахождение площадей криволинейных трапеций.

3. Нахождение длин кривых и объёмов.

4. Несобственные интегралы. Контрольная работа.

5. Функции нескольких переменных

1. Нахождение частных производных и полных дифференциалов.

2. Производные от неявно заданных функций. Производная сложной функции.

3. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

4. Производная по направлению.

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

6. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.

7. Условный экстремум.

6. Дифференциальные уравнения

1. Решение ДУ с разделяющимися переменными и однородных.

2. Решение линейных ДУ и уравнений Бернулли.

3. ДУ в полных дифференциалах.

4. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.

5. Решение однородных линейных ДУ.

6. Метод Лагранжа.

7. Решение неоднородных ДУ со специальной правой частью.

8. Решение систем ДУ.

7. Числовые и функциональные ряды

1. Исследование числовых рядов на сходимость.

2. Достаточные признаки сходимости.

3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

4. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница.

5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость.

6. Определение области сходимости степенного ряда.

7. Разложение функций в ряды Тейлора.

9. Разложение функций в ряды Фурье на $[-\pi, \pi]$.

10. Разложение функций в ряды Фурье на $[-1, 1]$.

8. Интегральное исчисление функций в нескольких переменных

1. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат.
2. Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат.
3. Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат.
4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системе координат.
5. Применение двойных и тройных интегралов для решения задач геометрии и механики.
6. Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов.
7. Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Формула Грина.
8. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Поток векторного поля.
9. Решение задач на формулы Остроградского-Гаусса и Стокса.

9. Элементы операционного исчисления

1. Нахождение изображений функции.
2. Нахождение оригиналов по изображениям.
3. Решение ДУ и систем ДУ.

10. Теория вероятностей

1. Элементы комбинаторики.
2. Решение задач на классическое определение вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
5. Схема повторных независимых испытаний.
6. Функция распределения. Плотность распределения. Числовые характеристики.
7. Законы распределения дискретных СВ.
8. Законы распределения непрерывных СВ.
9. Двумерные СВ. Функция распределения. Условные законы распределения.
10. Числовые характеристики двумерных СВ. Вычисление коэффициента корреляции.
11. Решение задач на предельные теоремы.

Справочное издание

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

Составитель

Бондарь Светлана Ростиславовна

Корректор *В. В. Кузьмич*

Оригинал-макет *Е. В. Юницкая*

Подписано в печать 31.12.2025. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Ризография. Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,26.

Тираж 94 экз. Заказ 31.

Издатель и полиграфическое исполнение:

учреждение образования «Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий N 1/306 от 22 апреля 2014 г.

Ул. Студенческая, 28, 247760, Мозырь, Гомельская обл.

Тел. (0236) 24-61-29.