В. Н. Навныко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

СТАТИКА

Пособие

Мозырь
2010

ISBN 978-985-477-359-9
9 789854 773599

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОЗЫРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени И. П. ШАМЯКИНА»

В. Н. Навныко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СТАТИКА

Пособие

Мозырь
2010

УДК
531.2(075.8) ББК
22.21я73 Н15

Автор
В. Н. Навныко,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики
УО «МГПУ имени И. П. Шамякина»

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией волновой оптики
ГНУ «Институт физики имени Б. И. Степанова» НАН Беларуси
С. Н. Курилкина;
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой физики
УО «Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»
П. А. Хило.

Печатается по решению редакционно-издательского
совета Учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический
университет имени И. П. Шамякина»

Навныко, В. Н.
Н15 Теоретическая механика. Статика : пособие / В. Н. Навныко. – Мозырь : УО «МГПУ имени И. П. Шамякина», 2010. – 64 с.
ISBN 978-985-477-359-9.

В пособии рассмотрены основные вопросы теоретической механики по разделу «Статика», изучаемые студентами инженерно-педагогического факультета и факультета технологии. Для закрепления полученных знаний приведен комплекс контрольных задач.

УДК 531.2(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-985-477-359-9.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – основа инженерного мышления. Изучение законов и закономерностей движения и взаимодействия материальных тел закладывает теоретическую базу для дальнейшего изучения общетехнических и специальных дисциплин. Решение задач по теоретической механике формирует у студентов навыки практического использования теоретических знаний при расчете конкретных механизмов и конструкций.

В настоящее время опубликовано огромное количество учебников, учебных пособий и методических разработок по теоретической механике. Однако в большинстве работ объем теоретического материала и сложность предлагаемых задач превышают требования, предъявляемые к студентам инженерных и технических факультетов педагогических вузов.

В данном пособии подобран теоретический материал и контрольные задания по ключевым вопросам статики.

В первой главе пособия представлены краткие теоретические сведения по основным вопросам раздела «Статика» дисциплины «Теоретическая механика». При изложении теоретического материала основное внимание уделяется анализу основных формул, принципов и теорем, необходимых для решения задач.

Во второй главе представлен комплект из четырех контрольных задач по статике, каждая из которых включает в себя 100 вариантов заданий. Выбор варианта задания для конкретной задачи происходит следующим образом: выбираются две последние цифры зачетной книги (например, две последние цифры – 45); первая цифра означает номер рисунка в задаче (в примере, 4 – номер рисунка), вторая цифра означает номер строки в таблице, в которой приведены некоторые из начальных данных задачи (в примере, 5 – номер строки в таблице).

Следует отметить, что предлагаемые теоретические сведения и задачи не являются исчерпывающим материалом по статике, а соответствуют минимальным требованиям, предъявляемым к студентам инженерных и технических факультетов педагогических вузов.

Для углубленного изучения предмета необходима дальнейшая работа с источниками, приведенными в списке рекомендованной литературы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Определения и аксиомы статики

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами.

Теоретическая механика представляет собой часть механики, в которой изучаются *общие* закономерности движения и взаимодействия материальных тел.

Другую часть механики составляют различные общие и специальные дисциплины, посвященные проектированию и расчету всевозможных конкретных механизмов и сооружений. Все эти технические дисциплины в основе своей базируются на законах и методах теоретической механики.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и установление условий равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих сил.

Механическим движением называется перемещение тела по отношению к другому телу, происходящее в пространстве и во времени.

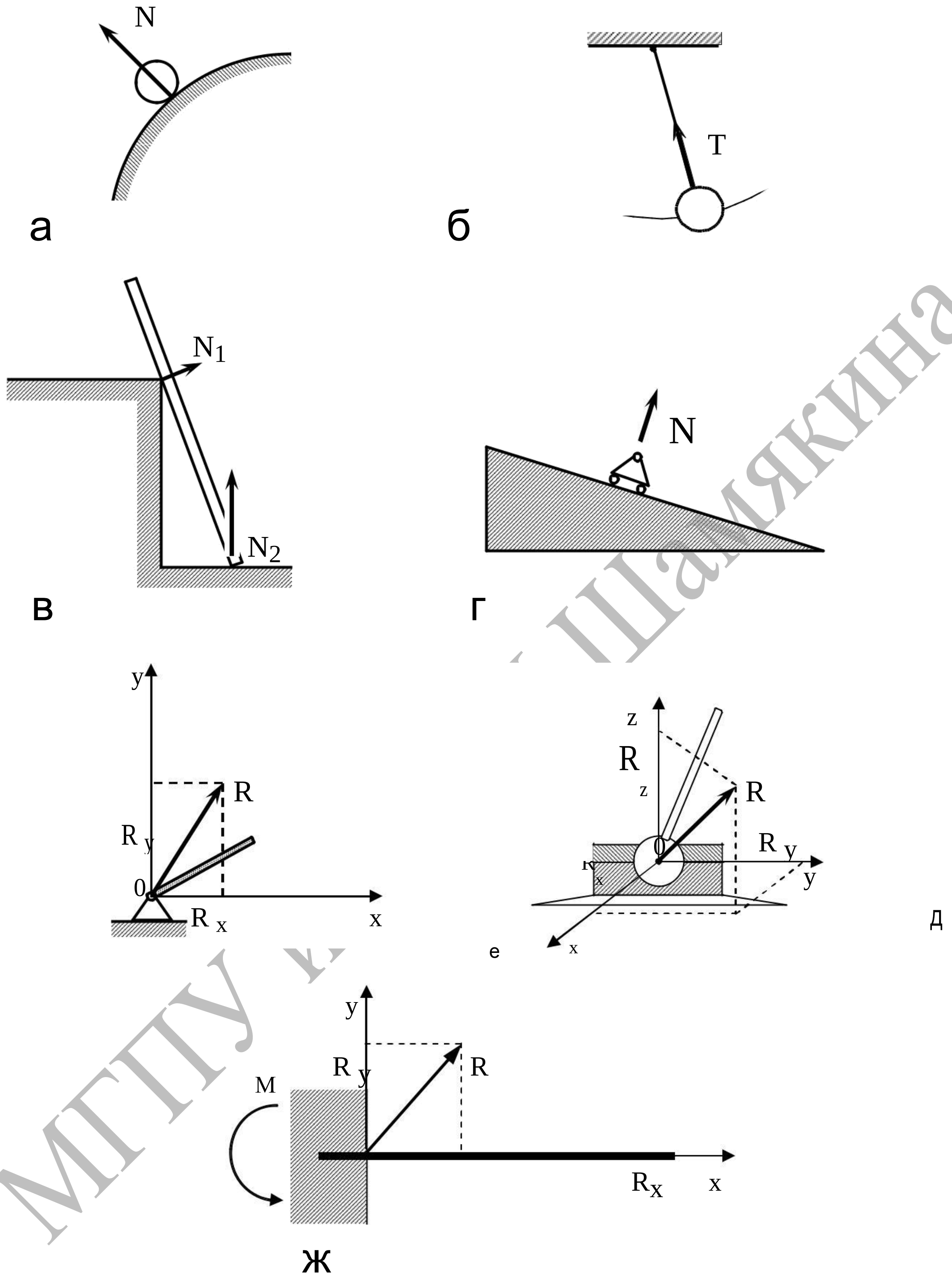
Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

Модели материальных тел:

материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу;

механической системой называется любая совокупность материальных точек;

абсолютно твердым телом (или неизменяемой механической системой) называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях.



а – тело находится на сферической поверхности;
б – тело подвешено на нити; в – тело на гладкой поверхности;
г – подвижная шарнирная опора; д – неподвижный цилиндрический шарнир;
е – неподвижный сферический шарнир и подпятник;
ж – жесткая заделка

Рисунок 1 – Связи и соответствующие им реакции связи

Все, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве называется *связью*.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется *силой реакции* (противодействия) *связи* или просто *реакцией связи* (рисунок 1).

Массой тела называется количественная мера инертности данного тела.

Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Силой в механике называется величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел.

Сила является величиной векторной, и ее действие на тело определяются следующими параметрами:

1) численная величина (модуль силы);

2) направление силы;

3) точка приложения силы.

Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

Равнодействующая сила – это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

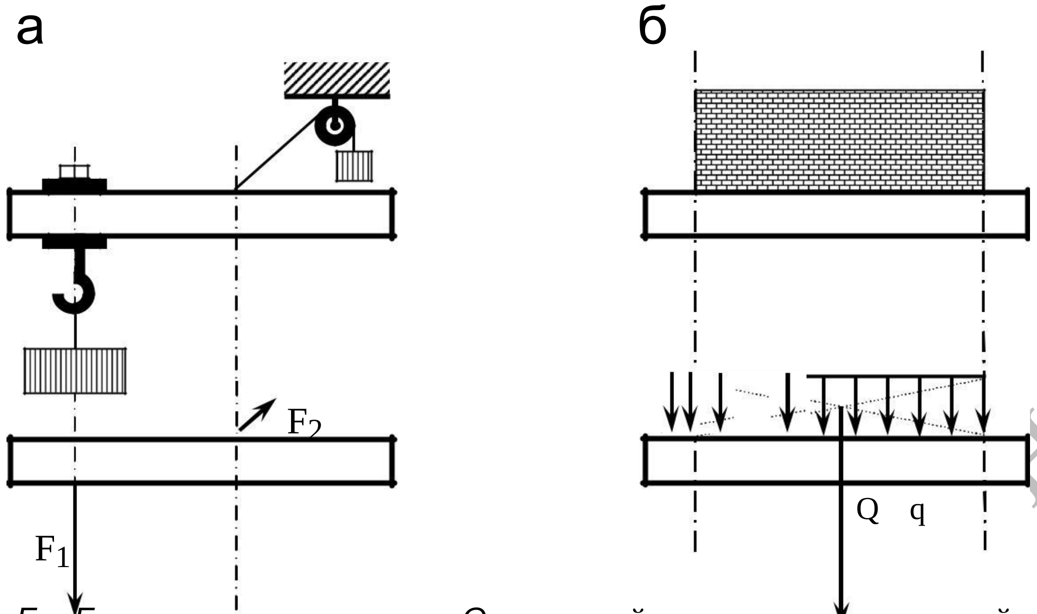
Сила, равная равнодействующей силе по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей силой*.

Внешние силы – это силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел.

Внутренние силы – это силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется *сосредоточенной* (рисунок 2а).

Силы, действующие на все точки данного объема или части поверхности тела, называются распределенными (рисунок 2б).



F_1 , F_2 – сосредоточенные силы Q – равнодействующая распределенной силы

Рисунок 2 – Примеры сосредоточенной (а) и распределенной (б) сил

Аксиома о равновесии системы двух сил

Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях.

Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю (рисунок 3). Если под действием сил F_1 и F_2 материальное тело находится в равновесии, то они образуют систему сил, эквивалентную нулю.

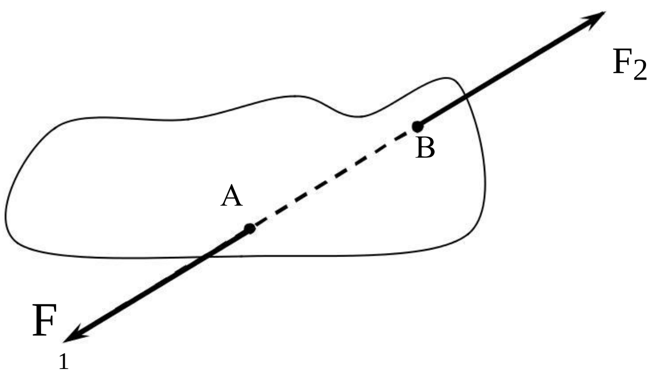


Рисунок 3 – Равновесие тела под действием системы двух сил

Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю

Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил.

Аксиома параллелограмма сил

Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах.

Замену двух сил F_1 и F_2 (рисунок 3а) одной равнодействующей силой F по правилу параллелограмма называют *векторным сложением сил*.

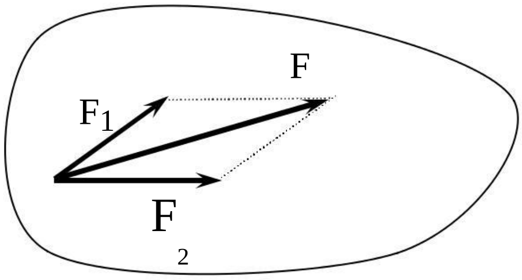


Рисунок 3а – Параллелограмм сил

Векторное сложение сил F_1 и F_2 математически выражают следующим образом:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 . \quad (1)$$

Модуль равнодействующей силы F определяется по формуле:

$$|\bar{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)} . \quad (2)$$

Направляющие равнодействующей силы F синусы находятся из выражений:

$$\sin(F,F_1) = \frac{|F_2|\sin(F_1,F_2)}{|F|}; \qquad (3а)$$

$$\sin(F,F_2) = \frac{|F_1|\sin(F_1,F_2)}{|F|}. \qquad (3б)$$

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.

Аксиома связей

Всякую связь можно отбросить и заменить силой реакции связи (в простейшем случае) или системой сил (в общем случае).

Аксиома отвердевания

Если деформируемое тело находится в равновесии, то его равновесие без изменения системы приложенных сил не нарушится от наложения на точки тела дополнительных связей, включая превращение деформируемого тела в абсолютно твердое.

Сформулированные аксиомы являются той основой, на которой строится вся статика сил, приложенных к твердому телу.

1.2 Сходящиеся силы

Системой сходящихся сил, или *пучком*, *называют систему сил* (например, система сил F_1, F_2, F_3, F_4, изображенная на рисунке 4), *линии действия которых пересекаются в одной точке – центре пучка* (точка О). Рассмотрим общий случай плоской системы сходящихся сил. Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор

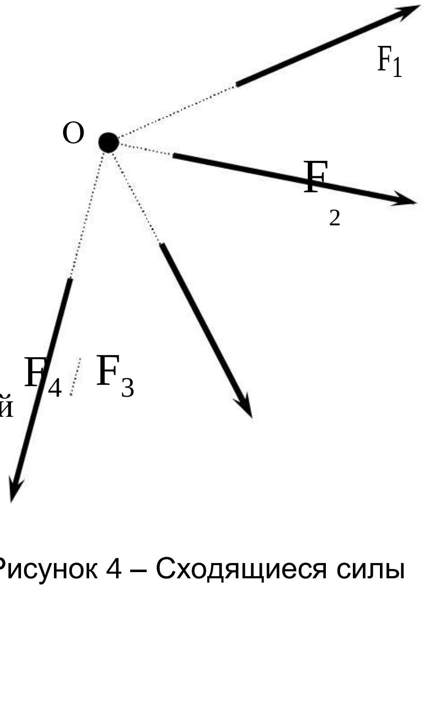


Рисунок 4 – Сходящиеся силы

скользящий, то можно считать, что силы системы (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) приложены в одной точке – центре пучка (точка О на рисунке 5а).

Найдем равнодействующую F системы сходящихся сил F_1 , F_2 , F_3 и F_4 методом параллелограммов.

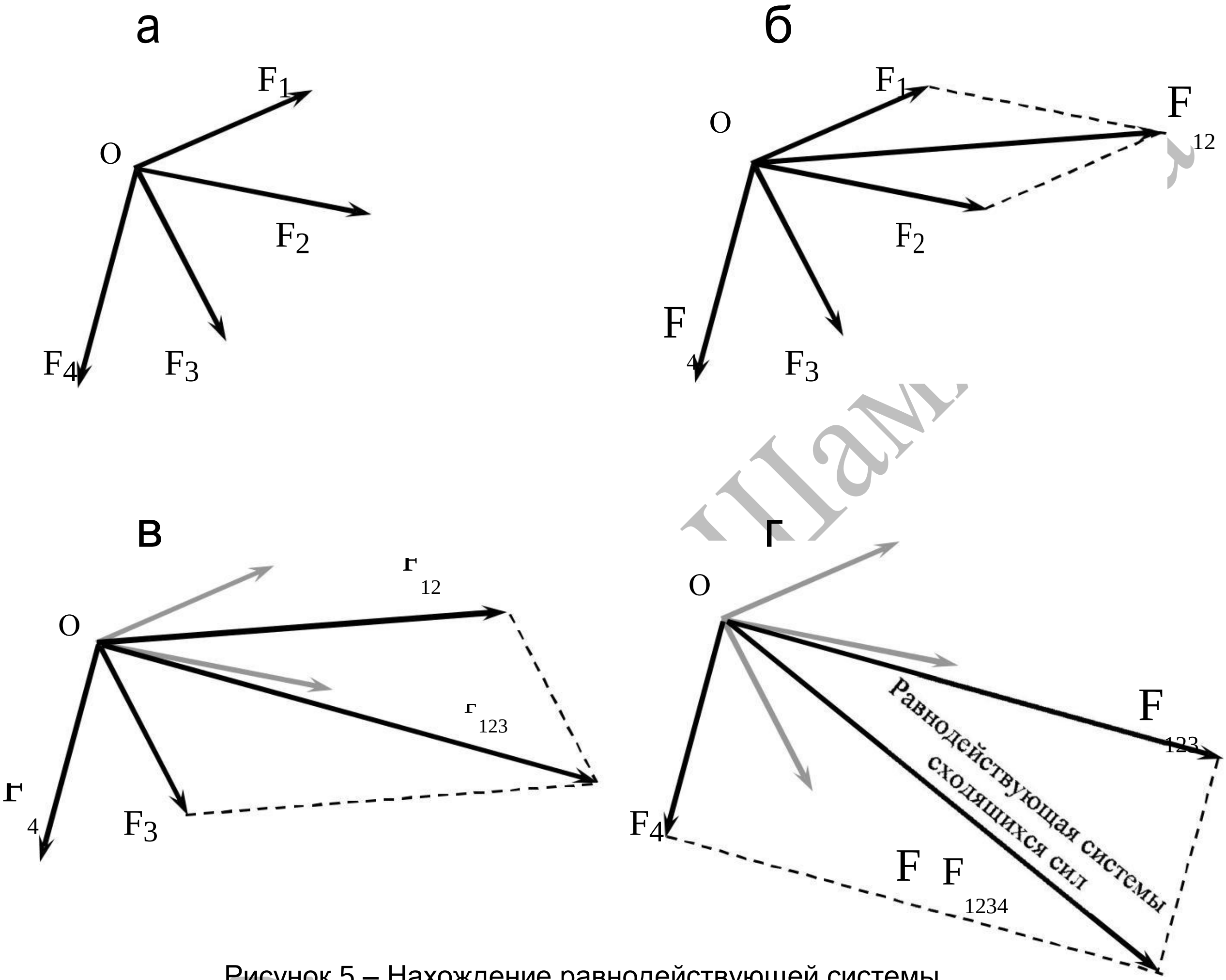


Рисунок 5 – Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) методом параллелограмма

Применяя к силам F_1 и F_2 пучка аксиому параллелограмма сил, заменим их одной равнодействующей силой F_{12} (рисунок 5б):

$$F_{12} \quad F_1 \quad F_2 .$$

Затем по правилу параллелограмма складываем силы F_{12} , F_3 и находим их равнодействующую (рисунок 5в):

$$F_{123} \quad F_{12} \quad F_3 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 .$$

Следует отметить, что на рисунке 5 серыми стрелками отмечено расположение векторов сил F_1, F_2, F_3.

Аналогично складываем силы F_{123}, F_4 и получаем (рисунок 5г):

$$F \quad F_{1234} \quad F_{123} \quad F_4 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 .$$

Сила F_{1234} является равнодействующей плоской системы сходящихся сил, которую обозначаем F.

Аналогичным образом можем найти равнодействующую системы, состоящей из n сходящихся сил, которую можно представить в виде:

$$F = F_{1,2,\ldots,n-1} + F_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i . \qquad (4)$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе F, которая является равнодействующей этой системы сил.

Процесс последовательного применения к силам правила параллелограмма или их векторного сложения приводит к построению *силового многоугольника*. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой силы (рисунок 6).

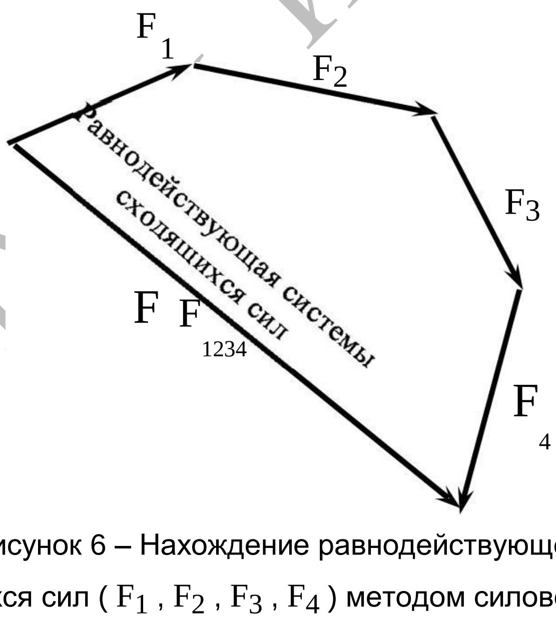


Рисунок 6 – Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил (F_1, F_2, F_3, F_4) методом силового многоугольника

Важно заметить, что система сходящихся сил в общем случае приводится к одной силе – равнодействующей этой системы сил, которая изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на силах системы.

Равнодействующая сила в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, то есть изображается *замыкающей* силового многоугольника.

Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является *пространственной* фигурой, для плоской – *плоской* фигурой.

Спроецируем векторы равенства (4) на прямоугольные оси координат.

Проекции замыкающей найдутся из следующих выражений:

$$\vec{F}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}, \qquad \vec{F}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy}, \qquad \vec{F}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz}. \qquad (5)$$

Модуль равнодействующей силы F и косинусы углов ее с осями координат определяются по формулам:

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz}\right)^2}, \qquad (6)$$

$$\cos\left(\vec{F}, \vec{e}_x\right) = \frac{F_x}{R}, \qquad (7а)$$

$$\cos\left(\vec{F}, \vec{e}_y\right) = \frac{F_y}{R}, \qquad (7б)$$

$$\cos\left(\vec{F}, \vec{e}_z\right) = \frac{F_z}{R}, \qquad (7в)$$

где e_x, e_y, e_z – единичные векторы прямоугольной системы координат.

В случае плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей выбирают перпендикулярно силам (например, ось Oz), то есть:

$$F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

В случае если в силовом многоугольнике системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, конец последней силы совпадает с началом первой силы, то такой силовой многоугольник называют *замкнутым* (рисунок 7).

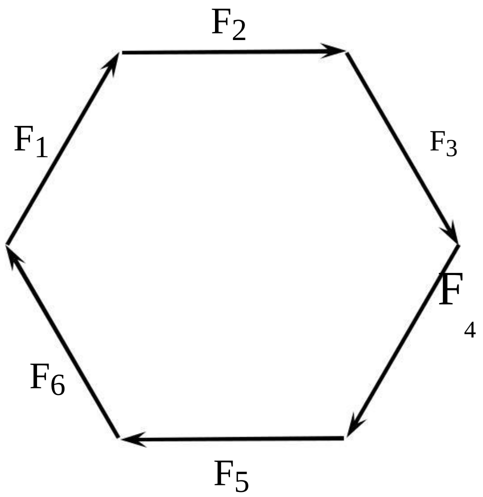


Рисунок 7 – Замкнутый силовой многоугольник

Условие равновесия в геометрической форме: для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

Условие равновесия в *аналитической форме*:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \tag{8}$$

то есть *для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю.*

В случае плоской системы сходящихся сил условие равновесия в аналитической форме имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$$

то есть *для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных координатных осей, лежащих в плоскости сил, были равны нулю.*

1.3 Параллельные силы. Центр тяжести

Теорема о равнодействующей системы параллельных сил

Две собственно параллельные силы приводятся к равнодействующей, направленной параллельно составляющим силам и равной их арифметической сумме. Линия действия равнодействующей делит внутренним образом отрезок, соединяющий точки приложения составляющих сил на части, обратно пропорциональные величинам этих отрезков.

▲[1] Пусть на абсолютно твердое тело действуют две силы, линии действия которых параллельны и силы направлены в одну сторону – *собственно параллельные силы*. Предположим, что в точках A и B (рисунок 8) к твердому телу приложены собственно параллельные силы F_1 и F_2 .

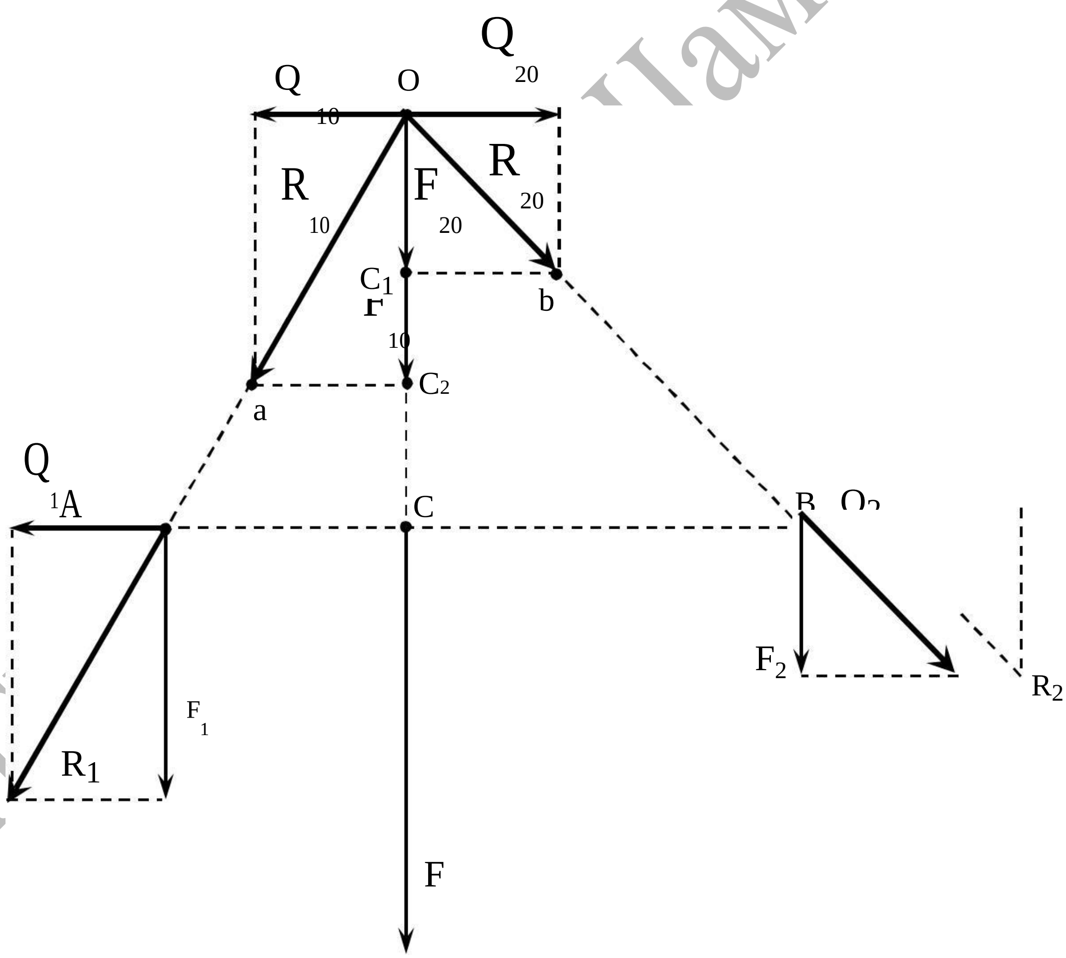


Рисунок 8 – Нахождение равнодействующей системы двух параллельных сил, направленных в одну сторону

[1] Символ ▲ обозначает начало и конец доказательства теоремы.

Добавим уравновешенную систему сил Q_1 и Q_2, приложенных в точках A и B, равных друг другу по величине и направленных вдоль AB в противоположные стороны.

Заменим силы F_1 и Q_1 равнодействующей R_1, а силы F_2 и Q_2 – равнодействующей R_2. Перенесем силы R_1 и R_2 вдоль линии их действия в точку O и разложим каждую из них на составляющие. Систему сил Q_{10} и Q_{20} отбрасываем как уравновешенную, а силы F_{10} и F_{20} складываем. Поскольку $|F_1|\ |F_{10}|$ и $|F_2|\ |F_{20}|$, то сила F будет равна арифметической сумме величин $|F_1|$ и $|F_2|$.

Таким образом, получаем, что $|F| \quad |F_1| \quad |\bar{F}_2|$.

Положение линии действия равнодействующей определяется точкой C – точкой пересечения линии действия равнодействующей F с отрезком AB.

Так как ΔAOC подобен ΔaOC_2, то $\frac{AC}{Q_{10}} \quad \frac{OC}{r_{10}}$.

Из подобия ΔCOB и ΔC_1Ob получаем: $\frac{CB}{Q_{20}\ r_{20}} \quad \frac{OC}{}$, и так как $|Q_{10}| \quad |Q_{20}|$, то из полученных пропорций находим:

$$\frac{AC}{CB} \quad \frac{|F_{20}|}{|r_{10}|} \quad \frac{|F_2|}{|F_1|} . \blacktriangle \qquad (9)$$

В случае пространственной системы двух собственно параллельных сил точка пересечения равнодействующей силы и отрезка, соединяющего точки приложения этих сил, находится следующим образом.

Пусть точки приложения сил F_1 и F_2 (рисунок 9) заданы радиусами-векторами r_1 и r_2. Радиус-вектор r фиксирует точку пересечения (точка C) линии действия равнодействующей и отрезка AB. Из рисунка 9 следуют очевидные равенства: $r \ r_1 \quad AC$ и $r_2 \ r \ CB$. Подставляя эти равенства в выражение (9), получаем:

$$r \; r_1 \qquad \frac{|F_2|}{|F_1|} r_2 \;\; r \quad ,$$

$$r \quad \frac{|F_1| r_1 \quad |F_2| r_2}{|F_1| \quad |F_2|} . \tag{10}$$

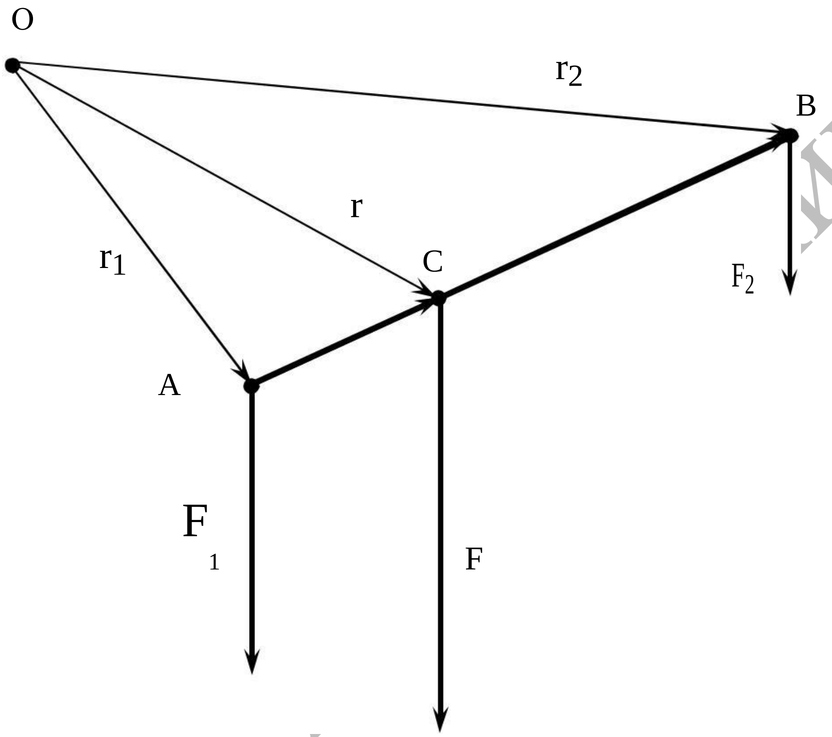


Рисунок 9 – Нахождение равнодействующей системы параллельных сил в общем случае

Пусть на абсолютно твердое тело действуют три собственно параллельные силы F_1, F_2 и F_3 , приложенные в точках, определяемых радиус-векторами r_1 , r_2 и r_3 (рисунок 9а). Складывая силы F_1 и F_2 , получим их равнодействующую F_{12} :

$$F_{12} \quad F_1 \quad F_2,$$

причем радиус-вектор r_{12} определится по формуле (10).

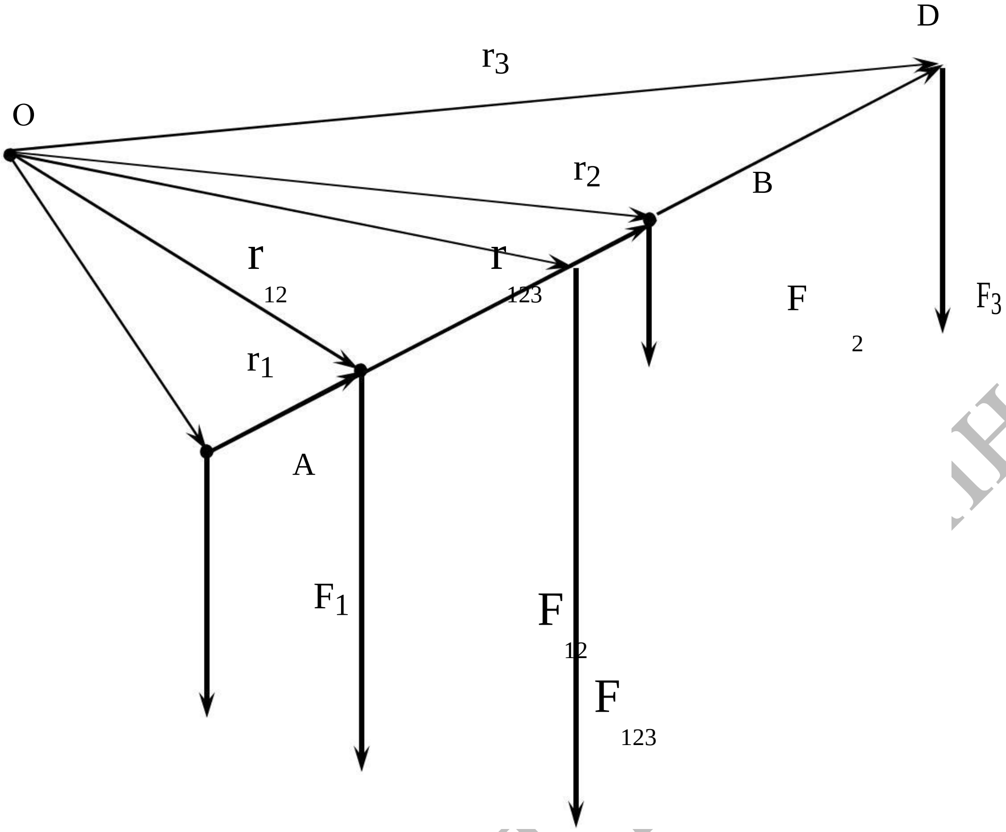


Рисунок 9а – Нахождение равнодействующей системы трех параллельных сил

Далее, складывая силы F_{12} и F_3, получаем равнодействующую F_{123}:

$$\left|r_{123}\right| \quad \left|r_{12}\right| \quad \left|\overline{F_3}\right| \quad \left|F_1\right| \quad \left|\overline{F_2}\right| \quad \left|F_3\right|.$$

Радиус-вектор r_{123}, определяющий ее линию действия, будет найден из выражения:

$$r_{123} \quad \frac{\left|F_{12}\right| r_{12} \quad \left|F_3\right| r_3}{\left|r_{12}\right| \quad \left|F_3\right|},$$

или, с учетом формулы (10), получаем:

$$r_{123} \quad \frac{\left|F_1\right| r_1 \quad \left|F_2\right| r_2 \quad \left|F_3\right| r_3}{\left|F_1\right| \quad \left|F_2\right| \quad \left|F_3\right|}.$$

Аналогично можно показать, что если к телу приложено n собственно параллельных сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то линия действия проходит через точку, радиус-вектор которой равен:

$$r = \frac{|F_1| r_1 + |F_2| r_2 + \ldots + |F_n| r_n}{|F_1| + |F_2| + \ldots + |F_n|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |F_i| r_i}{\sum_{i=1}^{n} |F_i|}, \tag{11}$$

при этом модуль равнодействующей находится из выражения:

$$|F| = \sum_{i=1}^{n} |F_i|. \tag{12}$$

Точка, радиус-вектор которой определяется выражением (11), называется *центром параллельных сил*. Проецируя радиус-вектор (11) на прямоугольные оси координат, получаем:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{ix} x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{ix}}, \tag{13а}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{iy} y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{iy}}, \tag{13б}$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{iz} z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{iz}}. \tag{13в}$$

Для определения центра тяжести механической системы выделим в ней достаточно малые частицы объема ΔV_n. К каждому из них приложим силу тяжести ΔQ_n, равную:

$$\Delta Q_i = \gamma_i \Delta V_i.$$

Равнодействующая этих параллельных сил по модулю равна весу тела:

$$Q \quad {}_{i\,1}^{\;n} \;\; {}_{i}\, V_{i}\,.$$

Радиус-вектор центра тяжести тела, который обозначим через r_c, найдем из формулы (11) как центр параллельных сил:

$$r_c \quad \frac{{}_{i\,1}^{\;n} \;\; {}_{i}\, V_{i}\, r_{i}}{{}_{i\,1}^{\;n} \;\; {}_{i}\, V_{i}}\,. \qquad (14)$$

Используя формулу (14), можно определить *центр тяжести механической системы.*

Если механическая система представляет собой тело, то в пределе сумма в формуле (14) обращается в интеграл и радиус-вектор r_c может быть вычислен по формуле:

$$r_c \quad \frac{{}_{V}\, rdV}{{}_{V}\, dV}\,. \qquad (15)$$

В случае, если тело однородно (= const), то формулу (15) можно записать в виде:

$$r_c \quad \frac{{}_{V}\, rdV}{V}\,. \qquad (16)$$

Методы вычисления центра тяжести:

метод симметрии; метод

разделения на части;

метод отрицательных масс;

метод интегрирования.

Определение центра тяжести стандартных фигур

А. Центр тяжести части дуги окружности лежит на ее оси симметрии Ox (рисунок 10) на расстоянии от центра O, равном:

$$x_C \; R \; \frac{\sin}{\quad} \; . \qquad (17)$$

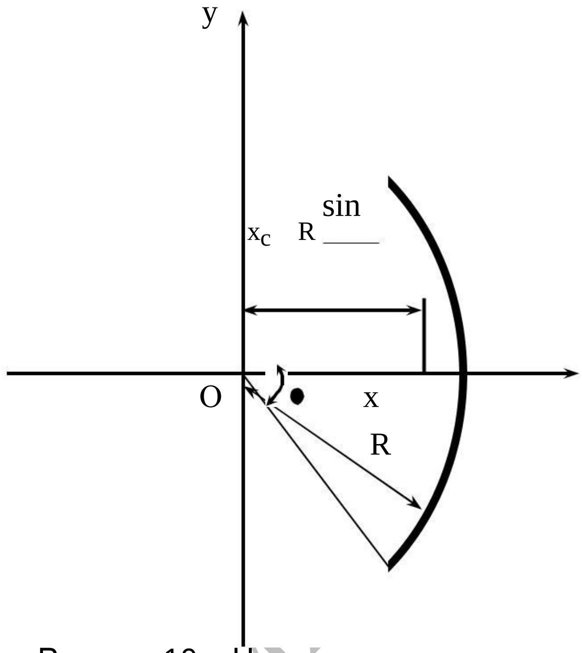


Рисунок 10 – Центр тяжести части дуги

Б. Центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан (рисунок 11), причем:

$$CE \; \frac{1}{3} BE \; . \qquad (18)$$

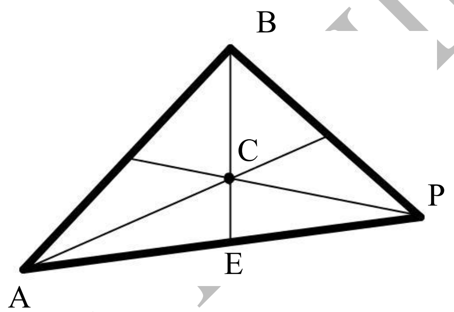


Рисунок 11 – Центр тяжести площади треугольника

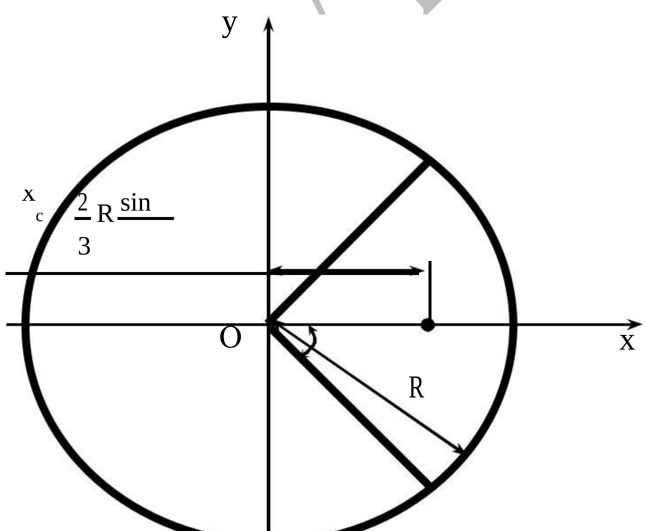


Рисунок 12 – Центр тяжести кругового сектора

В. Центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии Ox (рисунок 12) на расстоянии от центра O, равном:

$$x_C \; \frac{2}{3} R \frac{\sin}{\quad} \; . \qquad (19)$$

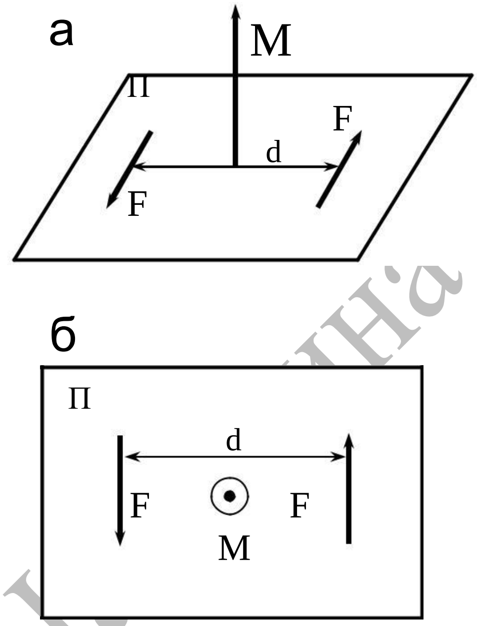
1.4 Пара сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рисунок 13).

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Расстояние d между линиями действия сил пары называется плечом силы.

Вектор момента пары направлен перпендикулярно плоскости действия пары так, что если смотреть с его конца, то пара сил будет стремиться повернуть тело против часовой стрелки.



а – общий вид;
б – вид сверху
Рисунок 13 – Пара сил

Модуль векторного момента пары сил равен произведению плеча пары d на модуль силы:

$$|M| = |F|d. \qquad (20)$$

Момент пары считается *положительным*, если пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и *отрицательным* – по ходу часовой стрелки.

Теорема о переносе пары сил в плоскости действия

Пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно перенести в любое место на ее плоскости действия.

▲ Пусть дана некоторая пара сил F_A, F_B с плечом d (рисунок 14). Выберем в плоскости действия пары отрезок CD длиной d и приложим к его концам силы F_C, F_C, F_D, F_D, перпендикулярные отрезку CD и равные по модулю. Перенесем силы F_A и F_D вдоль их линий действия в точку T и найдем их равнодействующую R_T. Выполняя аналогичные операции с силами F_B и F_C, получим приложенную в точке E равнодействующую R_E. Так как модули равнодействующих R_T и R_E

равны, линии действия совпадают, направления противоположны, то они образуют уравновешенную систему сил, которую можно отбросить.

Таким образом, вместо первоначальной пары F_A , F_B получим пару F_C , F_D , эквивалентную первоначальной, но расположенную в плоскости действия пары наперёд заданным образом. ▲

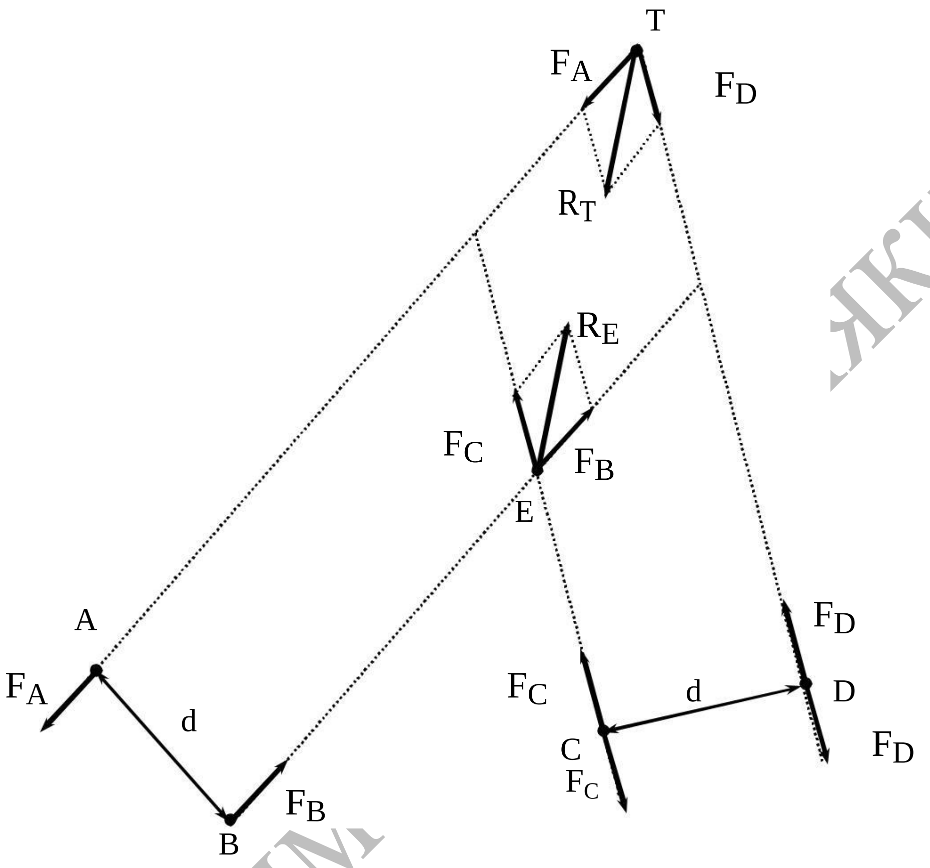


Рисунок 14 – Доказательство теоремы о переносе пары сил в плоскости действия

Теорема о переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости действия

Пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.

▲ Рассмотрим пару сил F_A , F_B в плоскости $П_1$ (рисунок 15). Спроектируем отрезок AB на плоскость $П_2$, параллельную $П_1$. Приложим в точках C и D взаимно уравновешивающиеся силы F_C , F_C , F_D , F_D , равные по модулю силам F_A , F_B и имеющие параллельные линии действия.

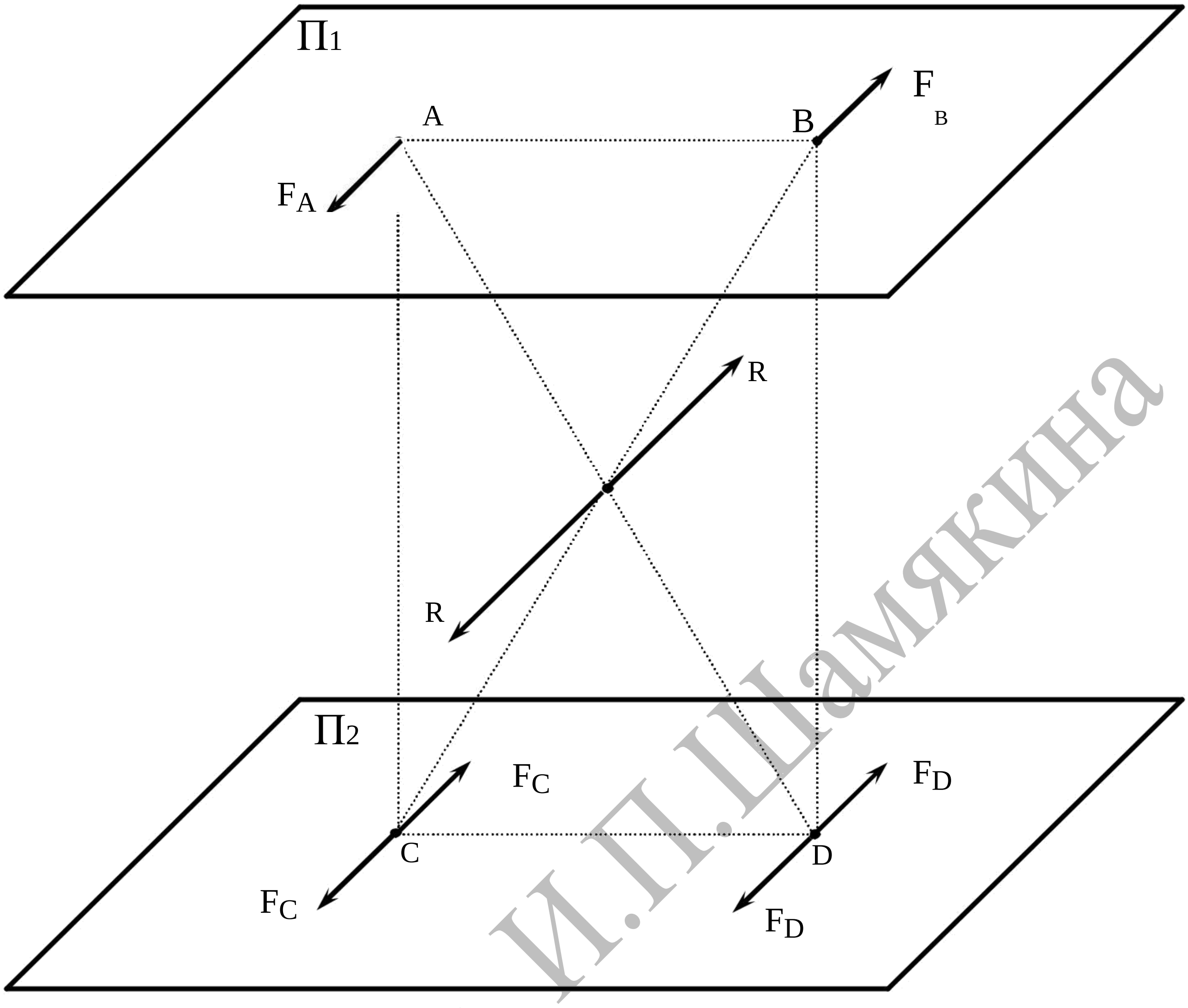


Рисунок 15 – Доказательство теоремы о переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости действия

Силы F_B и F_C можно заменить равнодействующей R , линия действия которой проходит через середину диагонали ВС. Аналогично силы F_A и F_D дадут равнодействующую R , такую же по величине и с той же линией действия, но направленную противоположно первой.

Две силы R и R взаимно уравновешиваются и их можно отбросить. Таким образом, остается пара сил в плоскости $П_2$, эквивалентная первоначальной. Теперь, согласно теореме о переносе пары сил в плоскости действия, мы можем перенести ее в любое место плоскости $П_2$. ▲

Теорема об эквивалентности пар сил

Пары сил, имеющие равные векторные моменты, эквивалентны.

▲ Пусть дана пара сил $F, \ F$ с плечом d_1, пара сил $P, \ P$ с плечом d_2 (рисунок 16а). Заменим силу F, приложенную в точке B (рисунок 16б), двумя параллельными силами: силой $F \quad P$, приложенной в точке A, и силой P, приложенной в точке C.

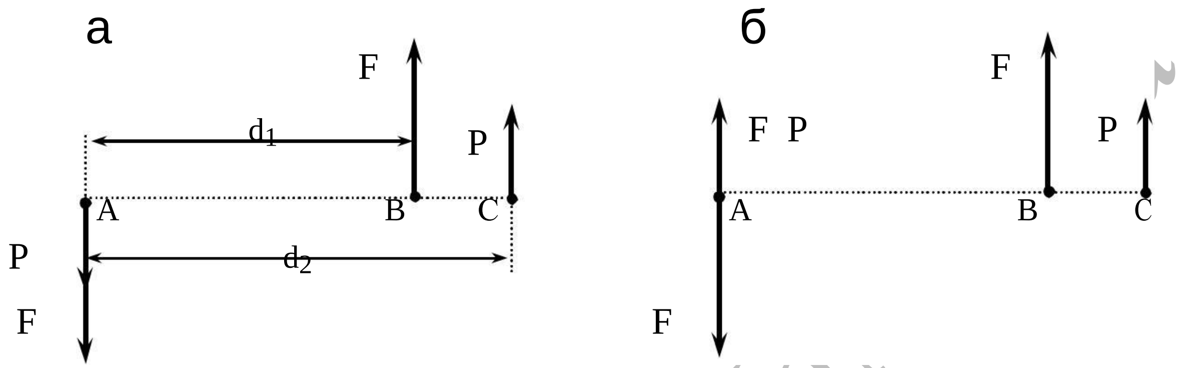


Рисунок 16 – Доказательство теоремы об эквивалентности пар

Складывая силу $F \quad P$ с силой F, получим силу P. Итак, вместо пары $F, \ F$ мы теперь имеем пару $P, \ P$. Так как сила F является равнодействующей сил $F \ P$ и F, то справедливо равенство: $\frac{|F| \quad |P|}{BC} \quad \frac{|P|}{AB}$. Отсюда следует, что $|F| AB \quad |P| \quad AC$, пары сил $F, \ F$ и $P, \ P$ эквивалентны. ▲

Теорема о равнодействующей пар сил

Векторный момент равнодействующей пар сил равен геометрической сумме векторных моментов составляющих пар.

▲ Рассмотрим пары $F_1, \ F_1$ и $F_2, \ F_2$, расположенных в пересекающихся плоскостях $П_1$ и $П_2$ (рисунок 17). Преобразуем силы, составляющие пары, которые при этом станут равными F_{1A}, F_{2A}, F_{1B} и F_{2B}.

Сложим соответствующие силы: $R_A = F_{1A} + F_{2A}$, $R_B = F_{1B} + F_{2B}$, но так как $F_{1B} = -F_{1A}$, $F_{2B} = -F_{2A}$, то $R_A = -R_B$. Таким образом, силы R_A и R_B образуют пару. Эта пара эквивалентна первоначальным двум и поэтому называется *равнодействующей*. ▲

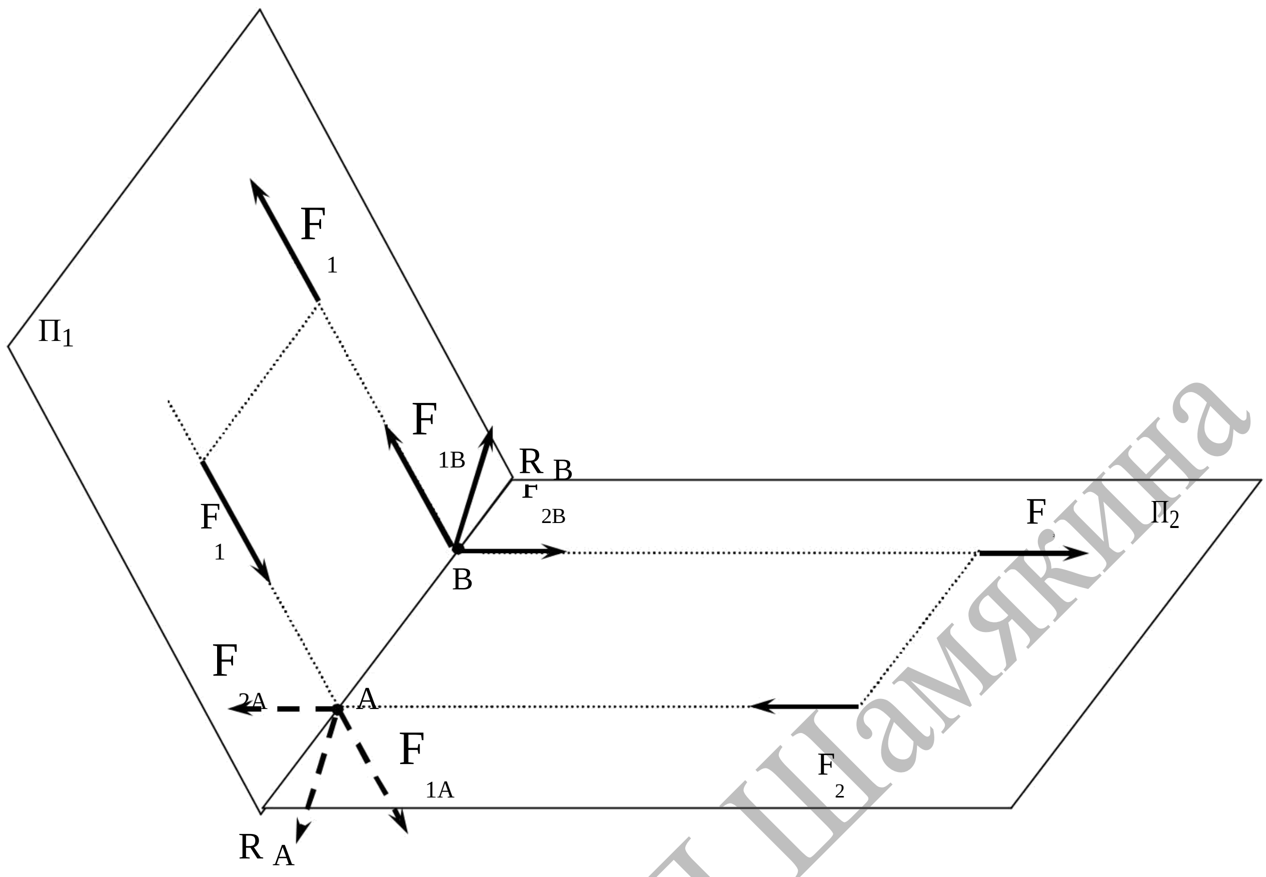


Рисунок 17 – Доказательство теоремы
о равнодействующей пар сил

Таким образом, момент равнодействующей пары равен:

$$M(R_A, R_A) = M(F_1, F_1) + M(F_2, F_2).$$

В общем случае равнодействующий векторный момент равен:

$$M(R, R) = \sum_{i=1}^{n} M_i(F_i, F_i). \qquad (21)$$

Условие равновесия системы пар сил:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(F_i, F_i) = 0. \qquad (22)$$

1.5 Момент силы

Момент силы относительно точки

Пусть к телу в точке А приложена сила F (рисунок 18). Выберем любую точку О и проведем из нее радиус-вектор r , идущий в точку приложения этой силы.

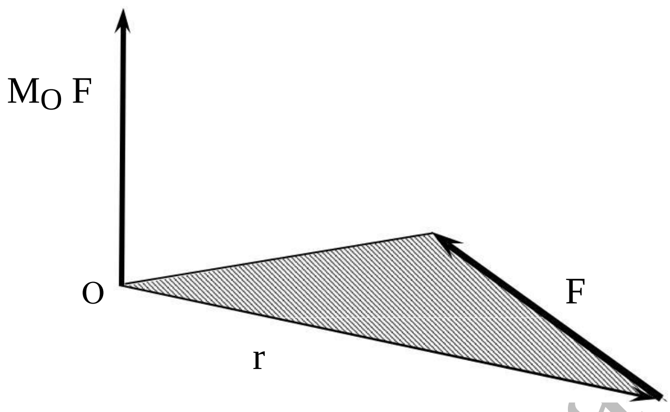


Рисунок 18 – Векторный момент силы относительно точки

Векторным моментом силы F *относительноточки* О *называется свободный вектор, определяемый векторным произведением радиус-вектора* r *и силы* F .

Обозначая его через M_O F , имеем:

$$M_O\,F \quad r\;F. \tag{23}$$

Вектор M_O F по модулю равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах r и F .

Направлен вектор M_O F перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами r и F , так, что если смотреть с его конца на эту плоскость, то сила F будет стремиться повернуть тело вокруг точки О против часовой стрелки. Обычно вектор M_O F считается приложенным в точке О.

Если сила F отлична от нуля, то векторный момент равен нулю только в том случае, когда точка О лежит на линии действия силы F .

В системе единиц СИ размерность момента силы относительно точки равна [M_O F] = Н м.

Из определения векторного момента следует, что он не меняется, если силу переместить вдоль линии действия.

Если рассматривается плоская система сил или силы, расположенные в одной плоскости, то целесообразно ввести понятие *алгебраического момента силы*.

Модуль алгебраического момента равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Если угол между этими векторами равен α (рисунок 19), то можем записать:

$$\left|M_O(\vec{F})\right| = Fr\sin\alpha . \qquad (24)$$

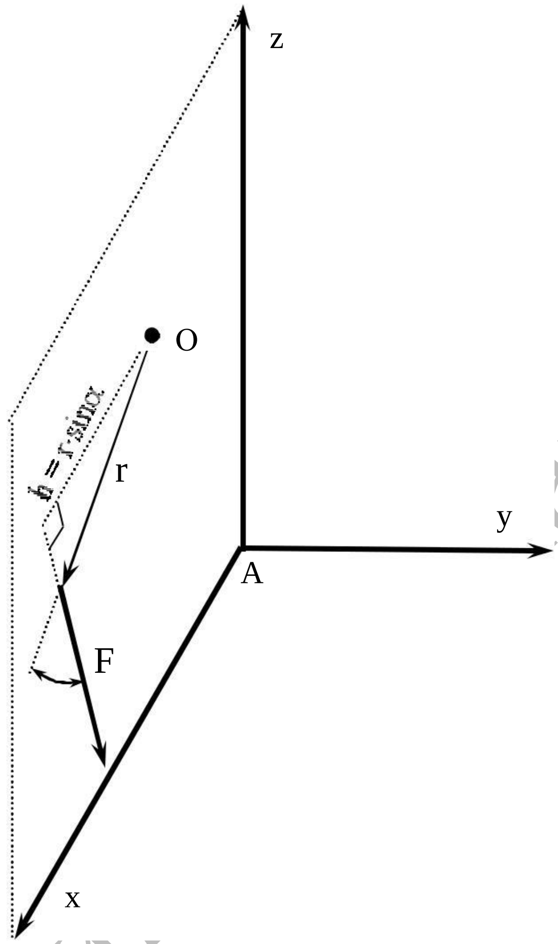


Рисунок 19 – Алгебраический момент
силы относительно точки

Произведение $r\sin\alpha = h$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы. Величина h называется *плечом силы* относительно точки О.

Расположим в плоскости, определяемой векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, оси координат Axyz, при этом ось Ay будет расположена перпендикулярно этой плоскости. Алгебраическим моментом силы называется произведение плеча силы h на модуль силы $\vec{F}$.

Знаком алгебраического момента будет плюс, если для наблюдателя, расположенного вдоль положительного направления оси Оу, сила F стремится повернуться вокруг точки О против часовой стрелки. В противоположном случае знак алгебраического момента будет отрицательным.

Формула определения моментов через проекции

В качестве точки О, относительно которой подсчитывается момент скользящего вектора, обычно выбирается начало координат. В этом случае момент силы будет приложен в начале координат и проекции его на оси будут соответствующими осевыми моментами.

Если задана сила F своими проекциями (F_x, F_y, F_z) и известны проекции радиус-вектора r (x_A, y_A, z_A), определяющего точку приложения силы F (или просто координаты этой точки), то момент вектора F относительно точки О определяются по формуле:

$$M_O \quad F \quad r \quad F \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} M_{0x}\, i \quad M_{0y}\, j \quad M_{0z} k, \qquad (25)$$

где $M_{0x} \quad y_A F_z \quad z_A F_y$, $M_{0y} \quad z_A F_x \quad x_A F_z$, $M_{0z} \quad x_A F_y \quad y_A F_x$.

Момент силы относительно оси

Для определения осевого момента силы F относительно оси Oz проведем перпендикулярную к ней плоскость П (рисунок 20). На рисунке радиус-вектор r определяет точку приложения силы F . Вектор M_O перпендикулярен плоскости, определяемой вектором силы F и радиусом-вектором r , и равен моменту силы F относительно точки О. Угол соответствует угловому расстоянию между осью Oz и вектором M_O . Отрезок A_1B_1 соответствует проекции вектора силы F на плоскость П.

Моментом силы относительно оси называется проекция момента силы относительно произвольной точки оси на ось:

$$M_{oz} \quad |M_O| \cos \quad |r \quad F| \quad \cos, \qquad (26а)$$

или

$$M_{oz} \quad 2S_{ABO} \cos \quad 2S_{A_1B_1O}. \qquad (26б)$$

Таким образом, *удвоенная площадь треугольника, образованного этой проекцией и точкой пересечения оси с плоскостью, определяет величину осевого момента*.

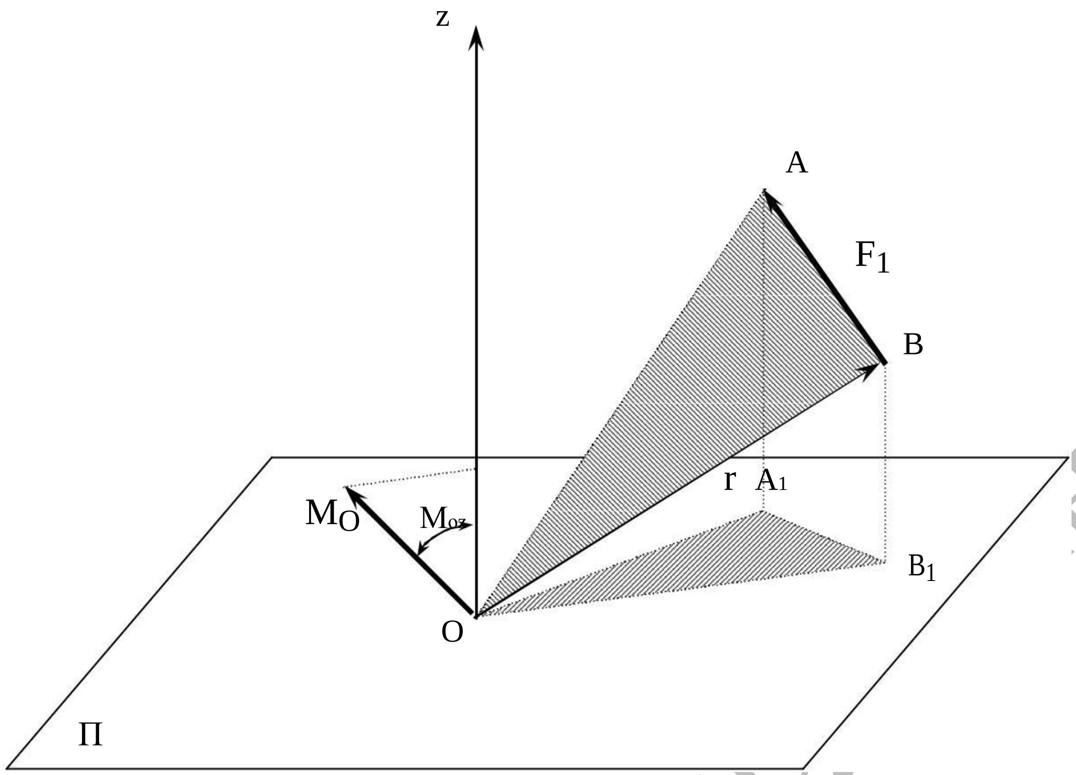


Рисунок 20 – Определение момента силы относительно оси

Знак момента будет положительным, если для наблюдателя, расположенного вдоль положительного направления оси, проекция вектора стремится повернуться вокруг точки пересечения оси с плоскостью против часовой стрелки. Если проекция стремится повернуться по часовой стрелке, то знак осевого момента будет отрицательным.

Теорема Вариньона

Если пространственная система сходящихся сил приводится к равнодействующей, то для нее справедлива теорема Вариньона, которая заключается в следующем: *момент равнодействующей пространственной системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен сумме моментов этих сил относительно той же точки.*

▲ Пусть на тело действует система сходящихся сил, равнодействующая которой определяется следующим образом:

$$F = F_1 + F_2 + \ldots F_n .$$

Найдем момент равнодействующей этой системы относительно некоторой произвольной точки О:

$$M_O(F) = r \times F = r \times (F_1 + F_2 + \ldots F_n),$$

$$M_O(F) = r \times F = r \times F_1 + r \times F_2 + \ldots r \times F_3 = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \ldots + M_O(F_3).$$

Таким образом, получаем: $M_O(F) = \sum_{i=1}^{n} M_O(F_i)$. ▲

1.6 Плоская и пространственная системы сил

Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Линии действия трех непараллельных взаимно уравновешивающихся сил, лежащих в одной плоскости, пересекаются в одной точке.

▲ Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, A_3 приложены три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости (рисунок 21). Перенесем силы F_1 и F_2 в точку пересечения их линий действия и найдем равнодействующую R .

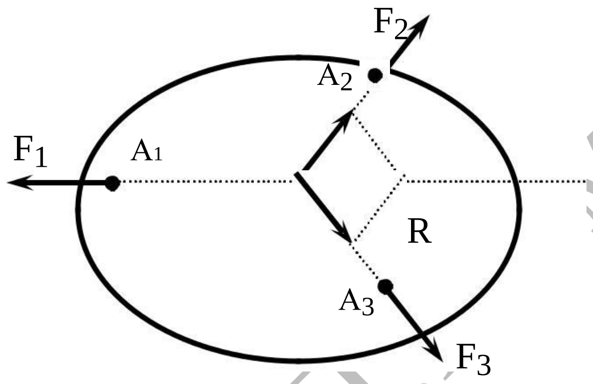


Рисунок 21 – К доказательству теоремы о равновесии трех непараллельных сил

Сила F_3 , будучи уравновешивающей системы сил F_1 и F_2 , равна по модулю R и направлена по ее линии действия в противоположную сторону.

Таким образом, линия действия силы F_3 проходит через точку, в которой пересекаются линии действия сил F_1 и F_2 , что и требовалось доказать. ▲

Теорема о параллельном переносе силы

Силу F можно переносить в любую точку пространства O, если добавить при этом пару с моментом, равным моменту силы F относительно точки O.

▲ Пусть сила F приложена в точке A (рисунок 22). Приложим в точке O уравновешенную систему сил F_O и F_O , причем $|F|$ $|\vec{F}_0|$ и F , F_O – собственно параллельные силы. Очевидно, что система

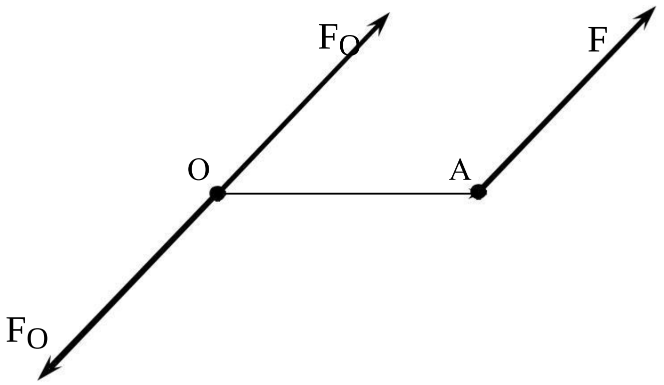


Рисунок 22 – Доказательство теоремы о параллельном переносе силы

3-х сил F, F_O и F_O эквивалентна одной силе F, но сила F и F_O образуют пару с моментом $M(F, F_0) = M_0(F)$. Таким образом, сила F_O изображается тем же вектором, что и сила F, но приложенная в другой точке пространства. ▲

Пара сил (F, F_O) называется *присоединенной парой*.

Главный вектор и главный момент

Пусть на абсолютно твердое тело действует система сил F_i (i = 1, 2, …, n), приложенных к различным его точкам и как угодно расположенных в пространстве (рисунок 23). Выберем произвольную точку O, которая называется *точкой приведения*, и перенесем в нее параллельно самим себе силы F_i.

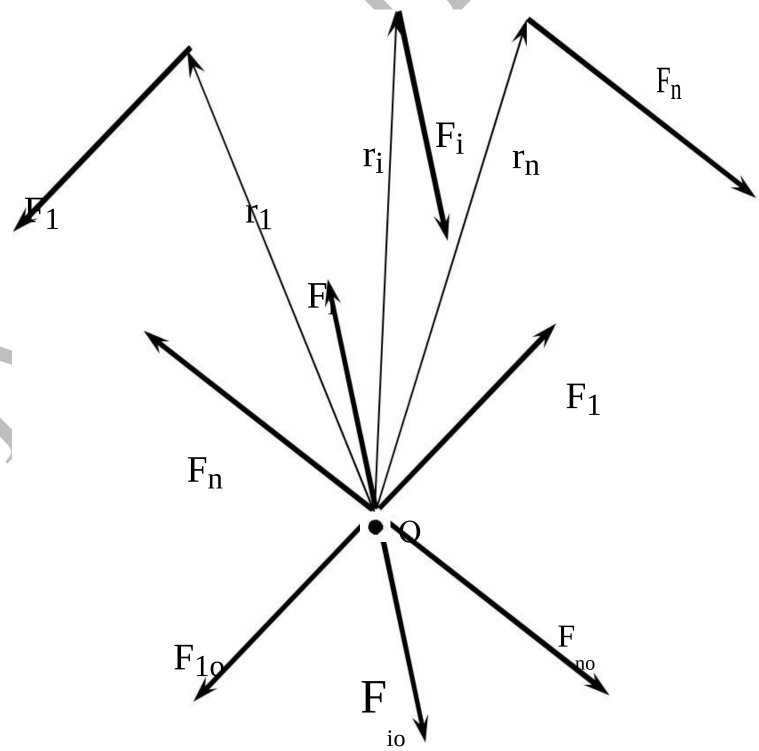


Рисунок 23 – Приведение системы сил

При этом на основании доказанной теоремы о параллельном переносе силы нужно прибавить n присоединенных пар с моментами:

$$M_i(F_i, F_i') = r_i F_i, \qquad (27)$$

где r_i – радиус-вектор, идущий из точки приведения О к точке приложения i-ой силы.

Таким путем исходная система сил приводится к системе n сходящихся сил, приложенных в точке О, и к системе n пар сил.

Силы F_i, приложенные в точке О, можно заменить результирующей силой:

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i . \qquad (28)$$

Вектор R называется *главным вектором* системы сил.

Главный вектор в общем случае не является равнодействующей, так как он не эквивалентен первоначальной системе сил.

Систему из n пар сил можно заменить одной парой с моментом M, равным геометрической сумме моментов присоединенных пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i(F_i, F_i') = \sum_{i=1}^{n} r_i F_i . \qquad (29)$$

Момент M называется *главным моментом системы* относительно точки приведения О.

Итак, *система сил в общем случае приводится к одной силе – главному вектору – и к одной паре, момент которой равен главному моменту.*

Условия равновесия плоской системы сил

Условия равновесия сил F_i (i = 1, 2, …, n), произвольно расположенных на плоскости, можно выразить в виде трех уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = 0, \qquad (30)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции сил на декартовы оси координат.

Эти уравнения называются *основными уравнениями равновесия плоской системы сил.* Центр моментов и начало координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Существуют две другие системы уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} U_i = 0, \tag{31а}$$

где $U_i = F_x, F_y, F_z$, или

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ci} = 0. \tag{31б}$$

Следует отметить, что в системе уравнений (31б) точки A, B, C не должны находиться на одной прямой.

Условия равновесия произвольной системы сил

Шесть основных уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил, расположенные произвольно, могут быть записаны в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ci} = 0. \tag{33}$$

Первые три уравнения называются *уравнениями проекций сил на оси*, а вторые три уравнения называются *уравнениями моментов сил относительно осей координат*.

При помощи выражений (25) уравнение моментов представим в виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{ix} - z_i F_{iy} \right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right) = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) = 0, \end{aligned} \qquad (34)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точки приложения силы F_i ;

F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекции этой силы на оси координат, которые могут иметь любые направления.

Существуют также и другие системы шести уравнений равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве. Однако эти системы, в отличие от (32) и (33), могут рассматриваться как уравнения равновесия только в том случае, если они удовлетворяют определенным условиям.

1.7 Трение

Трение скольжения

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей соприкосновения возникает *сила трения скольжения*.

В теоретической механике обычно рассматривается только сухое трение между поверхностями тел, то есть такое трение, когда между ними нет смазывающей жидкости. Для сухого трения надо различать:

– *трение скольжения при покое или равновесии тела;*

– *трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью*.

Законы Кулона

В 1781 г. Кулон установил основные приближенные законы для сухого трения скольжения.

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону,

противоположную направлению возможного или реального скольжения тела, под действием приложенных сил. Сила трения скольжения при покое зависит от активных сил, и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, т. е.

$$0 \quad F \quad F_{max}\,.$$

2. Максимальная сила трения скольжения при прочих равных не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению N (нормальная реакция), т. е.

$$F_{max} \quad N\,, \qquad (35)$$

где безразмерный коэффициент называется *коэффициентом трения скольжения*, и он не зависит от нормального давления.

4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физических состояний трущихся поверхностей (от величины и характера шероховатости, влажности, температуры и др.).

Угол и конус трения

Пусть твердое тело под действием активных и реактивных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, когда сила трения $F_{тр}$ достигает наибольшего значения при данном значении нормальной реакции N (рисунок 24).

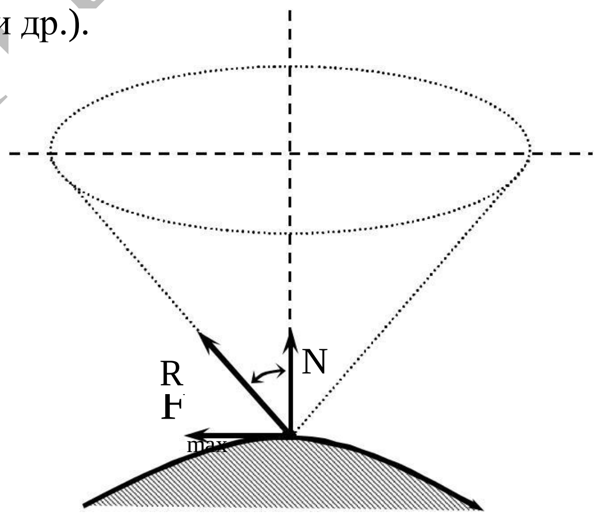


Рисунок 24 – Конус трения

Наибольший угол между полной реакцией F_{max}, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции, и направлением нормальной реакции называется *углом трения*.

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения:

$$tg \quad \frac{F_{max}}{N}\,, \qquad F_{max} N\,, \qquad tg. \qquad (36)$$

Конусом трения называют конус, описанный полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции.

Условие равновесия тела при шероховатой поверхности: для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через вершину. Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения.

Трение качения

Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения (участок BD на рисунке 25а) могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению.

Следует различать *чистое качение*, когда точка соприкосновения катка не скользит по неподвижной плоскости, и *трение со скольжением*, когда наряду с вращением катка есть и скольжение, т. е. точка катка движется по плоскости.

Приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению, заключаются в следующем.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующей качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

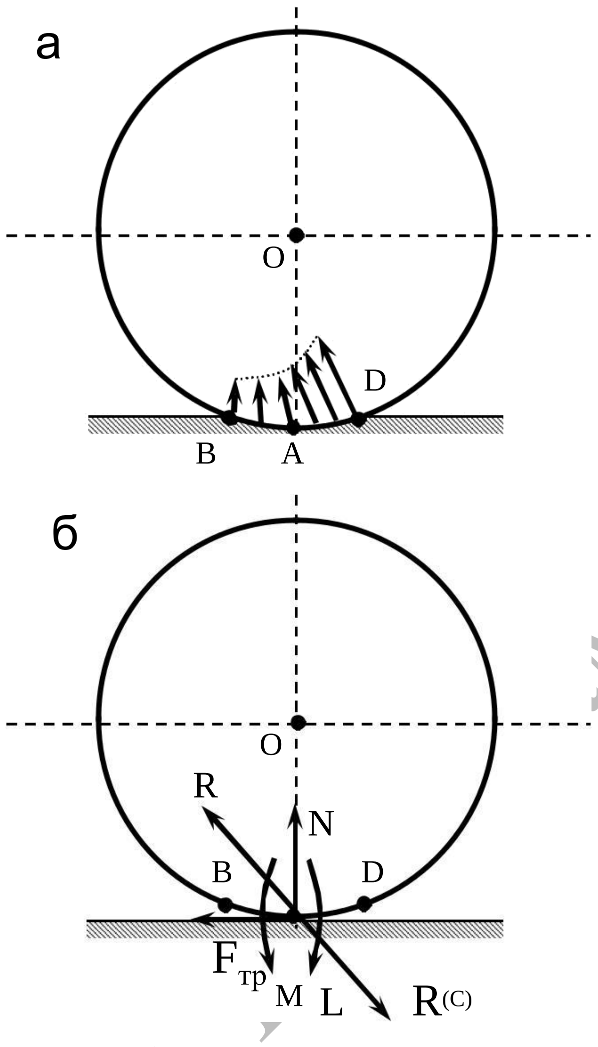
2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции N (рисунок 25б):

$$M_{max} \quad N, \qquad (37)$$

где – коэффициент трения качения.

На рисунке 25б изображены: M – момент пары сил, препятствующей вращению; L – момент пар активных сил, стремящейся катить каток; N – нормальная реакция; $F_{тр}$ – сила трения скольжения; R – главный вектор распределенных сил; $R^{(C)}$ – главный вектор активных сил.

3. Коэффициент трения качения зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей.



а – эпюра сил сопротивления;

б – силовая схема

Рисунок 25 – Трение качения

Следует помнить, что коэффициент трения качения равен длине, которую следует отложить в направлении, в котором активные силы стремятся катить каток.

Трение верчения

В случае трения верчения активные силы стремятся вращать тело (например, в форме шара) вокруг нормали к общей касательной поверхности соприкосновения. В этом случае возникает пара сил, препятствующая верчению, причем наибольший ее момент, возникающий в момент начала верчения, также прямопропорционален нормальной реакции.

Глава 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

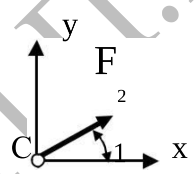
2.1 Задача С1

Условие задачи

Жесткие невесомые стержни АС и ВС закреплены между собой в точке С шарнирно, а в точках А и В закреплены шарнирно с вертикальной стеной (см. вариант рисунка С1), причем точки А, В и С лежат в одной плоскости. В точке С приложена сосредоточенная постоянная сила F_1 , которая по величине равна 250 Н, а направление указано на рисунке. Кроме того, в точке С приложена сосредоточенная постоянная сила F_2 , величина и направление которой указаны в таблице 1.

Определить силы реакций связи, действующие в стержнях АС и ВС.

Таблица 1 – Данные к задаче С1

Сила				
Номер условия	1			
	F_2 = 150 Н	F_2 = 100 Н	F_2 = 300 Н	F_2 = 200 Н
0	90	–	–	–
1	–	–	180	–
2	270	–	–	–
3	–	–	0	–
4	–	90	–	–
5	–	–	–	270
6	–	180	–	–
7	–	–	180	–
8	0	–	–	–
9	–	–	–	0

Комментарий к задаче

Задача С1 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с плоской системой сходящихся сил. Для решения этой задачи и проверки достоверности полученных результатов следует использовать как геометрические (метод силового многоугольника, метод построения параллелограммов), так и аналитические методы.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге вертикальную стену, стержни и указанные на рисунке координатные оси, выбрав точкой их пересечения точку С.

2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом стержни заменить действующими на них силами.

3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на координатные оси.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил с учетом данных задачи.

5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения сил.

6. Проверить достоверность полученных численных значений сил, действующих в стержнях АС и ВС – отдельно на чертеже построить силовой многоугольник из векторов всех сил и удостовериться в том, что он является замкнутым.

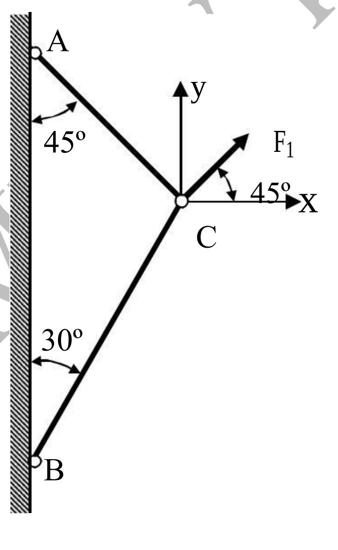


Рисунок С1 – Вариант № 0

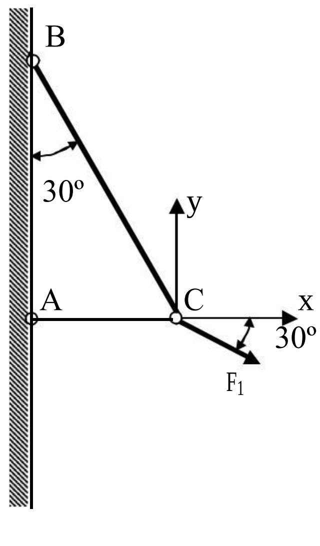


Рисунок С1 – Вариант № 1

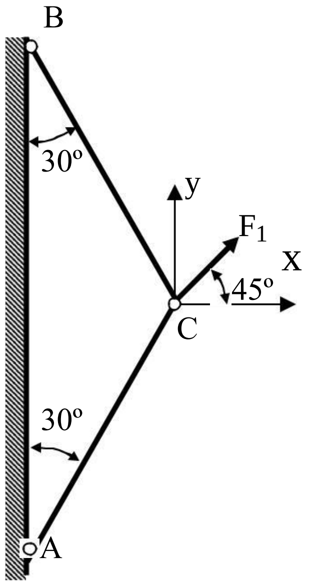


Рисунок С1 – Вариант № 2

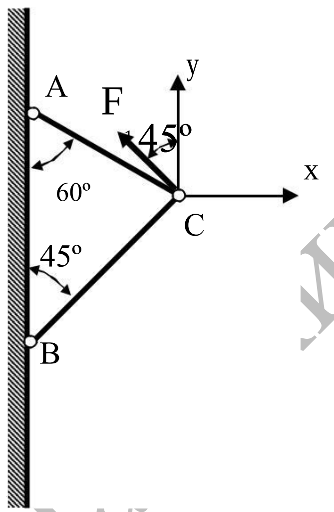


Рисунок С1 – Вариант № 3

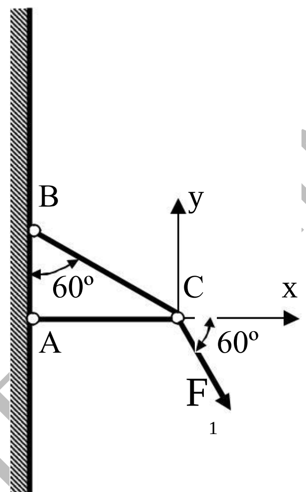


Рисунок С1 – Вариант № 4

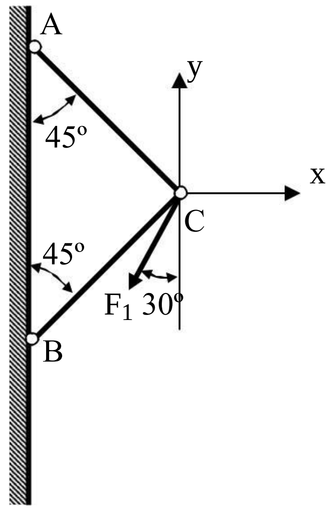


Рисунок С1 – Вариант № 5

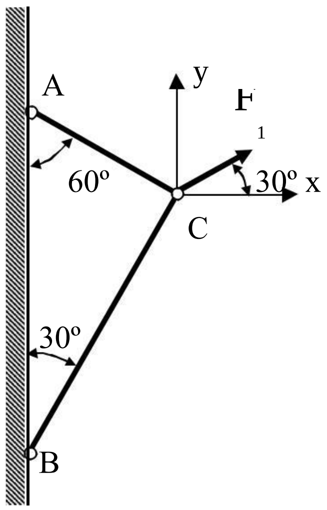


Рисунок С1 – Вариант № 6

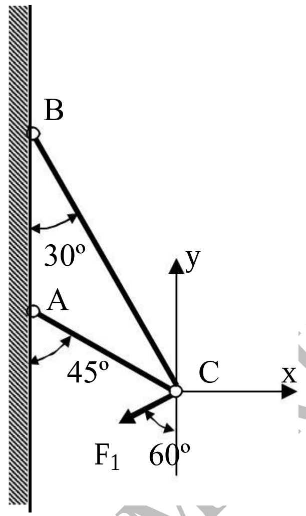


Рисунок С1 – Вариант № 7

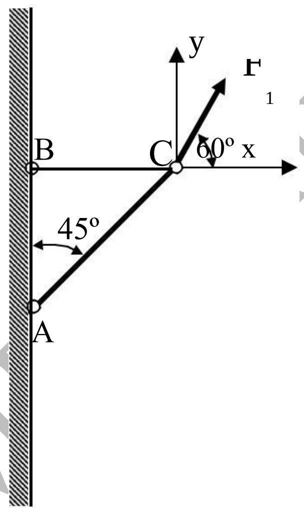


Рисунок С1 – Вариант № 8

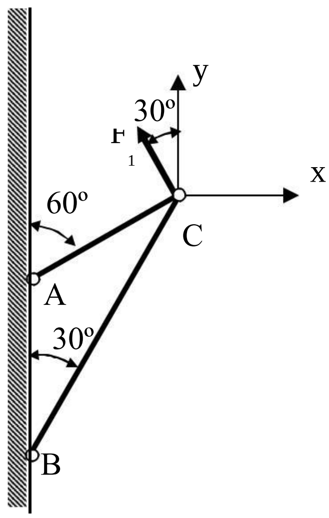


Рисунок С1 – Вариант № 9

2.2 Задача С2

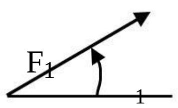
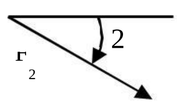
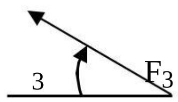
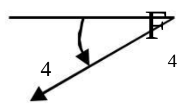
Условие задачи

На недеформируемую тонкую невесомую балку ABCDE действует пара сил с моментом M = 50 Н м и распределенная нагрузка, максимальная интенсивность которой составляет q_{max} = 50 Н/м. Кроме того, на балку действует сосредоточенная постоянная сила (величина, направление и точка приложения силы указаны в таблице 2).

Определить силы реакций связей, удерживающих балку в равновесии, через заданные величины.

При подсчетах принять AB = BC = CD = DE =1 м.

Таблица 2 – Данные к задаче С2

Сила	 $F_1 = 50$ Н		 $F_2 = 30$ Н		 $F_3 = 70$ Н		 $F_4 = 40$ Н	
Номер условия	Точка приложения	1	Точка приложения	2	Точка приложения	3	Точка приложения	4
0	C	30	–	–	–	–	–	–
1	–	–	B	45	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	D	30
3	–	–	E	60	–	–	–	–
4	D	60	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–	–	C	45	–	–
6	–	–	–	–	–	–	C	30
7	–	–	–	–	E	30	–	–
8	D	30	–	–	–	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	E	60

Комментарий к задаче

Задача С2 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с произвольной плоской системой сил, действующей на материальное тело. В задаче необходимо определить значения удерживающих балку в равновесии реакций связей в случае, когда на нее действуют лежащие в одной плоскости силы и крутящий момент. В задаче используются следующие типы связей и их комбинации: неподвижный цилиндрический шарнир + подвижный цилиндрический шарнир; неподвижный цилиндрический шарнир + невесомый нерастяжимый стержень, закрепленный на неподвижном цилиндрическом шарнире; консольное закрепление балки.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге балку и выбрать систему отсчета, указав на чертеже координатные оси.

2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом заменив связи их реакциями.

3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на выбранные координатные оси.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сил с учетом действующих на балку сил.

5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения реакций связей.

6. Составив и решив дополнительное уравнение моментов, провести проверку полученного решения.

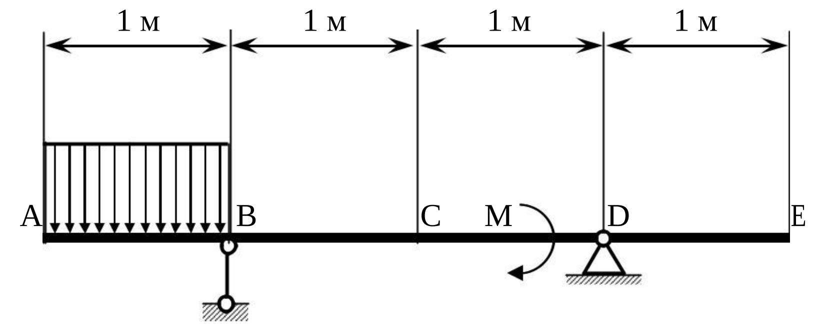


Рисунок С2 – Вариант № 0

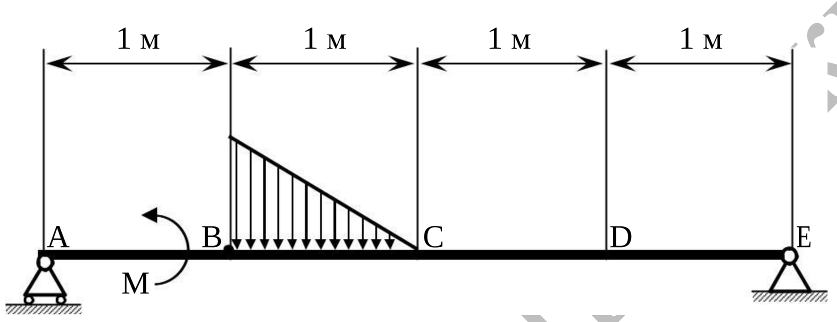


Рисунок С2 – Вариант № 1

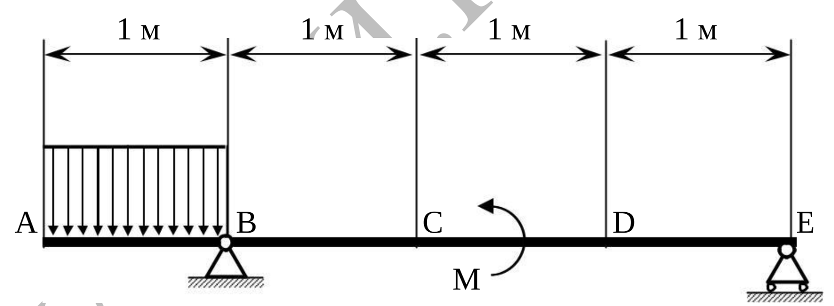


Рисунок С2 – Вариант № 2

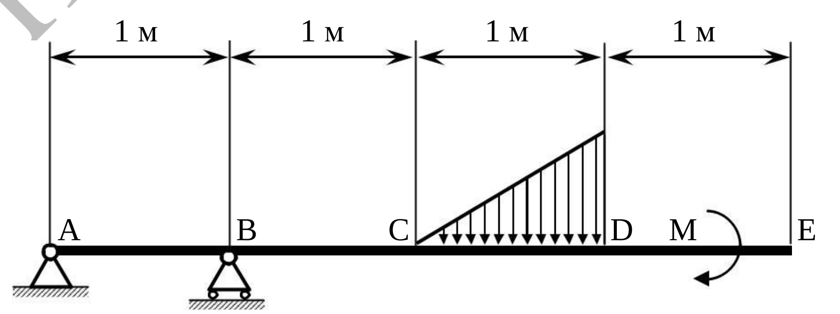


Рисунок С2 – Вариант № 3

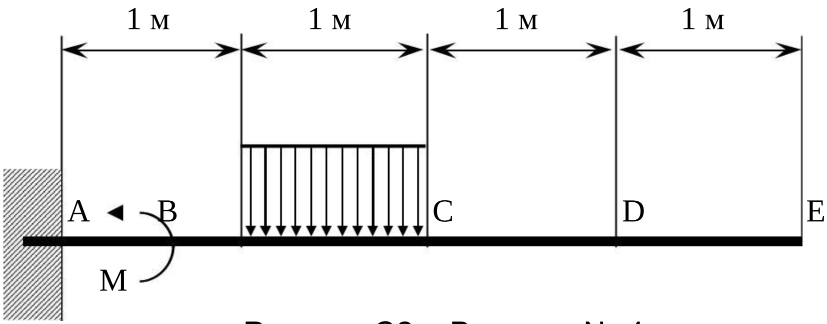


Рисунок С2 – Вариант № 4

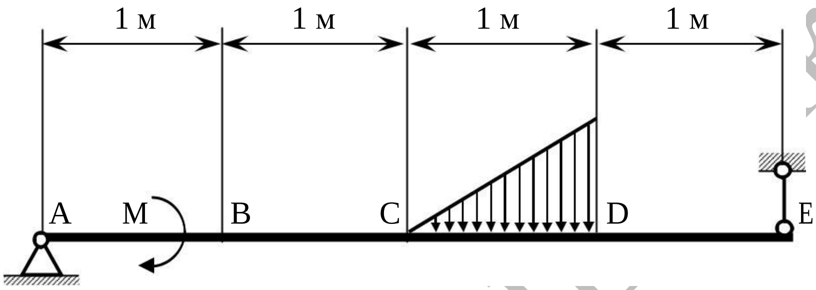


Рисунок С2 – Вариант № 5

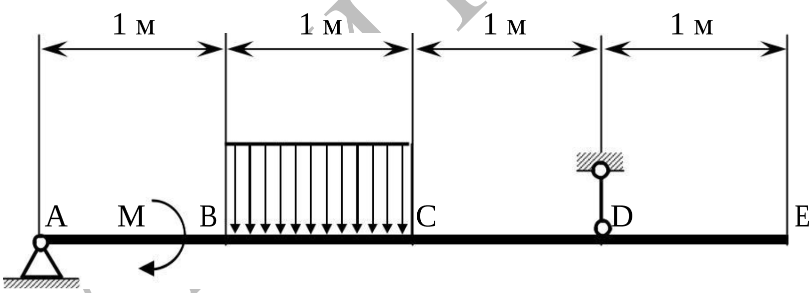


Рисунок С2 – Вариант № 6

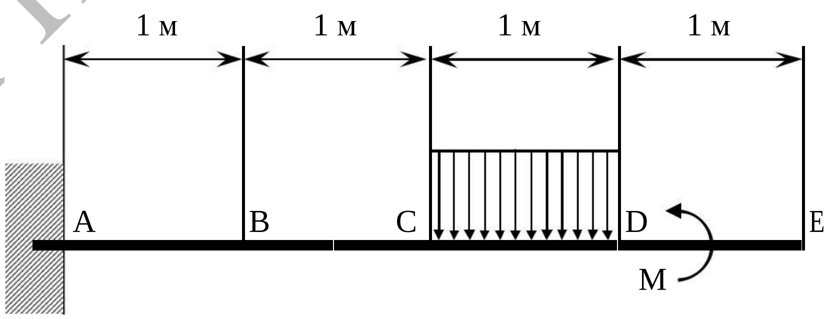


Рисунок С2 – Вариант № 7

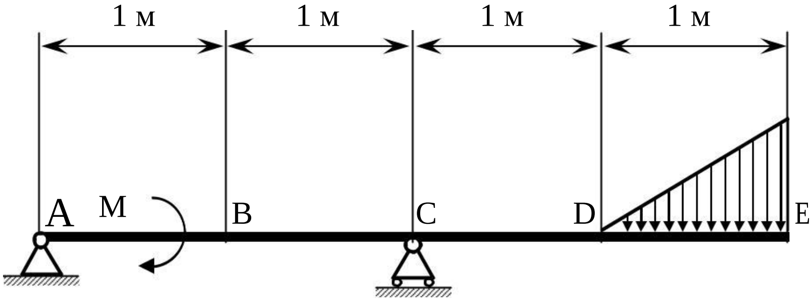


Рисунок С2 – Вариант № 8

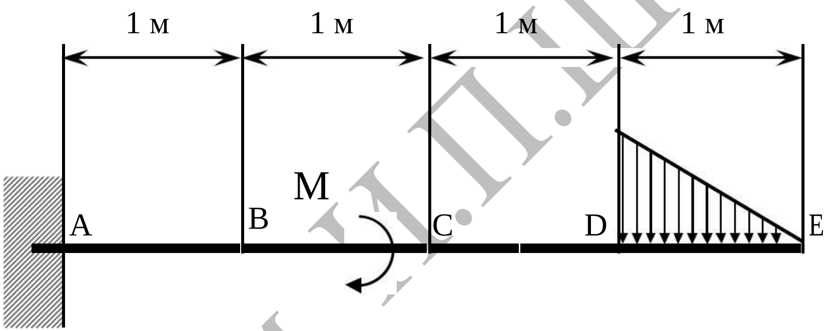


Рисунок С2 – Вариант № 9

2.3 Задача С3

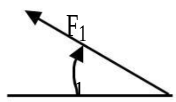
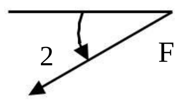
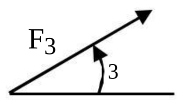
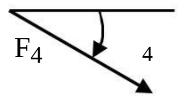
Условие задачи

Жесткая невесомая рама ABCDEKL закреплена так, как это указано на рисунке С3. При подсчетах принять AB = BC = CD = DE = EK = KL = 1 м.

На раму действует распределенная нагрузка максимальной интенсивности q_{max} = 50 Н/м, а также постоянная сила F (F = 100 Н). На раму действует сосредоточенная сила (величина, направление и точки приложения силы указаны в таблице 3).

Определить через заданные величины реакции связей, действующих на раму.

Таблица 3 – Данные к задаче С 3

Сила								
	F_1 = 50 Н		F_2 = 30 Н		F_3 = 70 Н		F_4 = 40 Н	
Номер условия	Точка приложения	1	Точка приложения	2	Точка приложения	3	Точка приложения	4
0	–	–	C	30	–	–	–	–
1	–	–	–	–	B	45	–	–
2	D	30	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	E	60	–	–
4	–	–	D	60	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–	–	C	45
6	–	–	–	–	–	–	C	30
7	–	–	–	–	–	–	E	30
8	–	–	D	30	–	–	–	–
9	E	60	–	–	–	–	–	–

Комментарий к задаче

Задача С3 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с произвольной плоской системой сил, действующей на материальное тело. В задаче необходимо определить значения удерживающих раму в равновесии реакций связей в случае, когда на нее действуют лежащие в одной плоскости силы и крутящий момент. В задаче используются следующие типы связей и их комбинации: неподвижный цилиндрический шарнир + подвижный цилиндрический шарнир; неподвижный цилиндрический шарнир + невесомый нерастяжимый стержень, закрепленный на неподвижном цилиндрическом шарнире; консольное закрепление балки.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге раму и выбрать систему отсчета, указав на чертеже координатные оси.

2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом заменив связи их реакциями.

3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на выбранные координатные оси.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сил с учетом действующих на балку сил.

5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения реакций связей.

6. Выполнить проверку полученного решения, составив и решив дополнительное уравнение моментов.

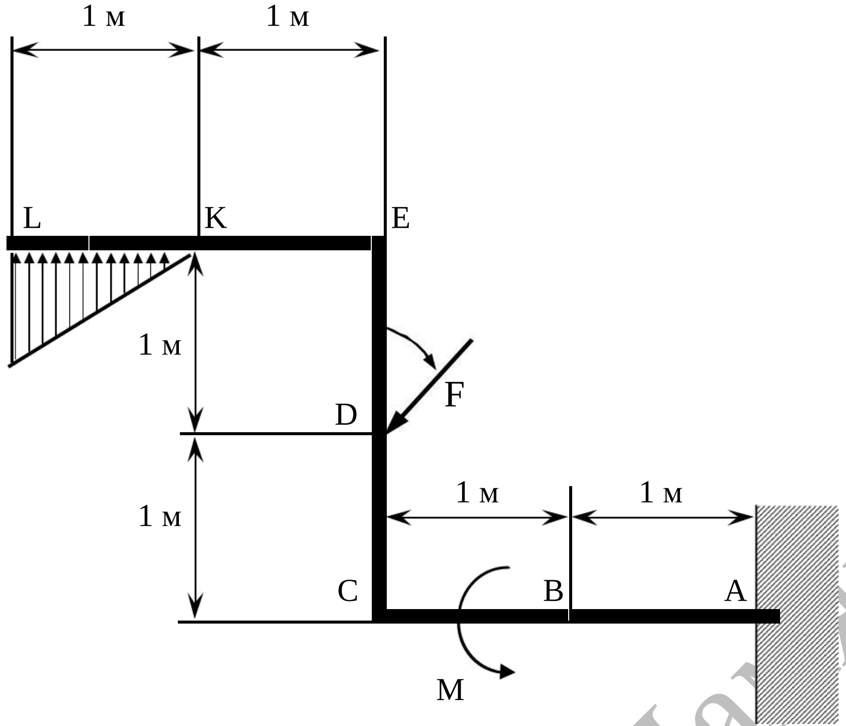


Рисунок С3 – Вариант № 0

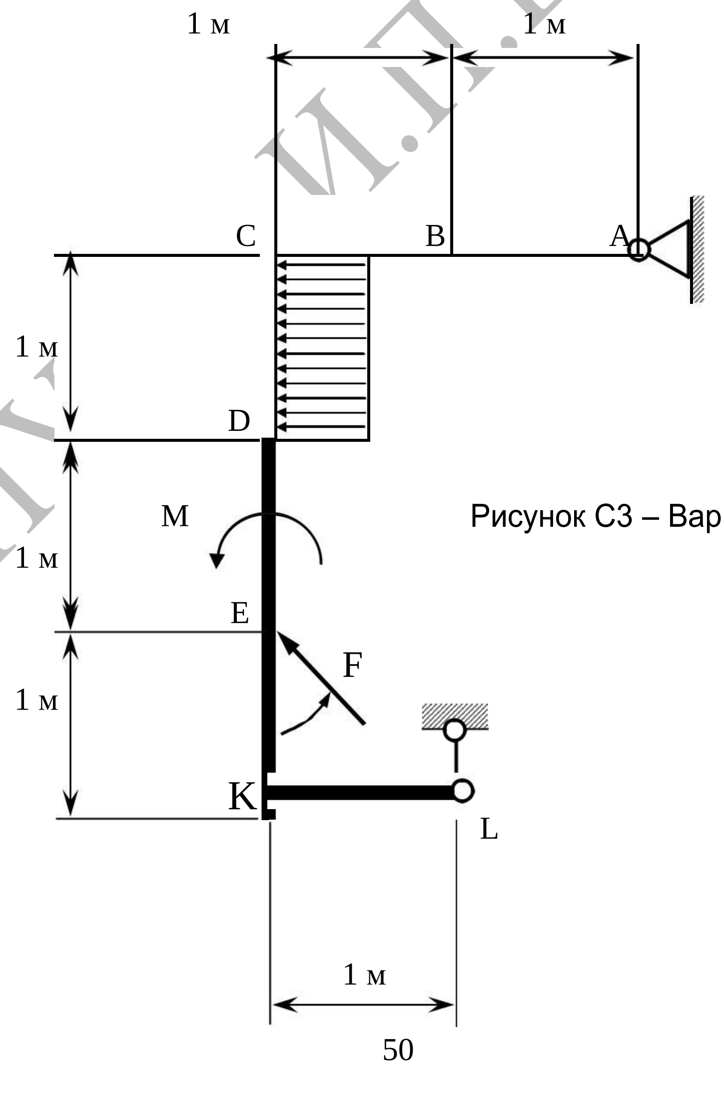


Рисунок С3 – Вариант № 1

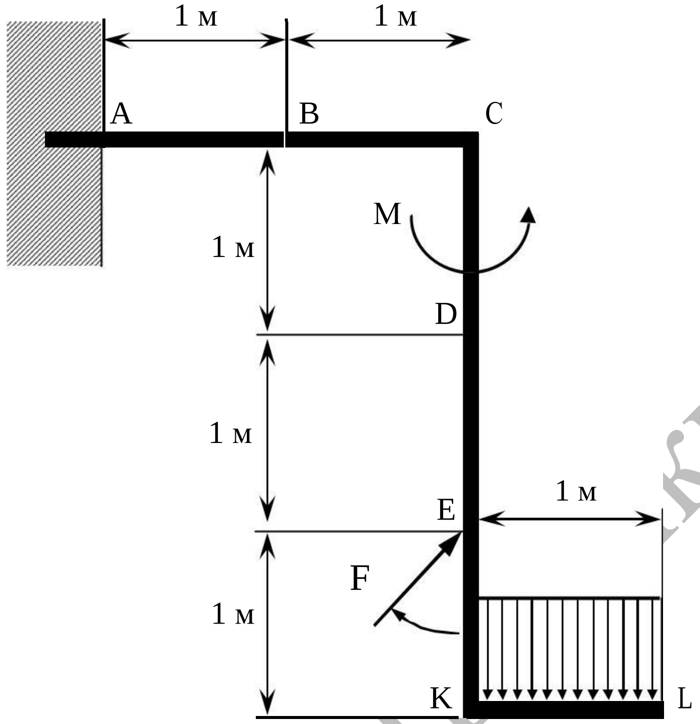


Рисунок С3 – Вариант № 2

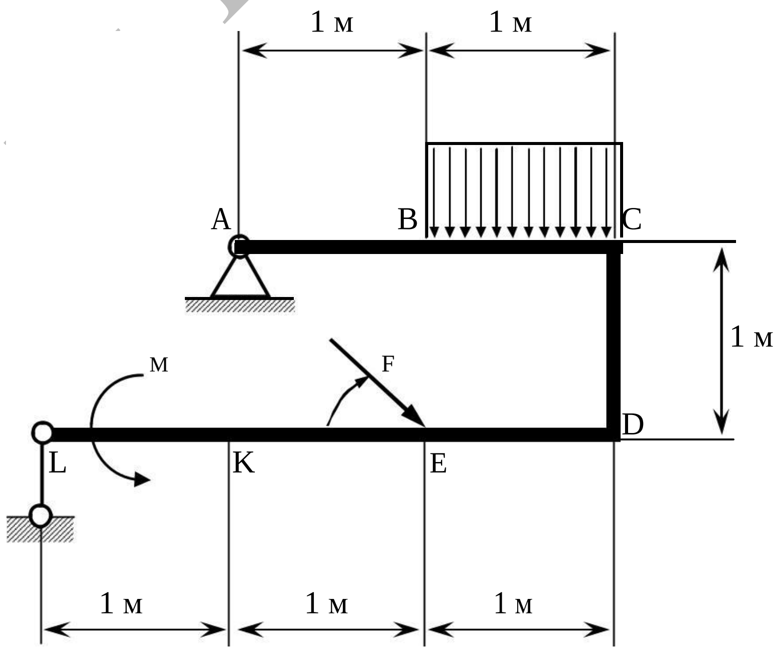


Рисунок С3 – Вариант № 3

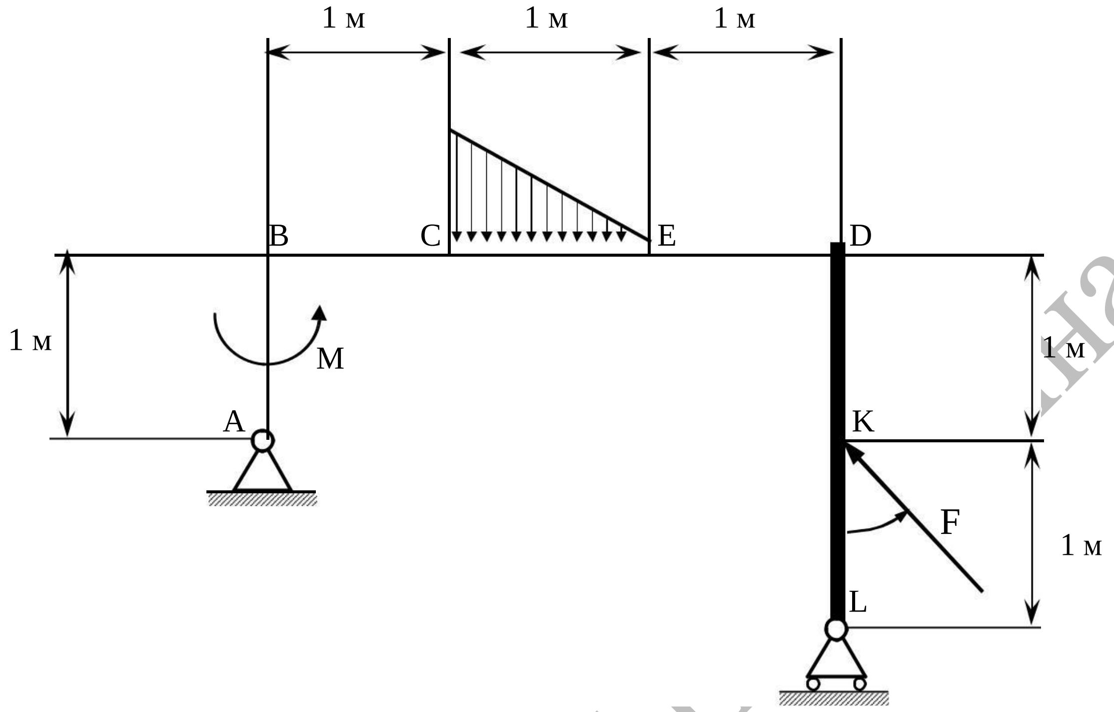


Рисунок С3 – Вариант № 4

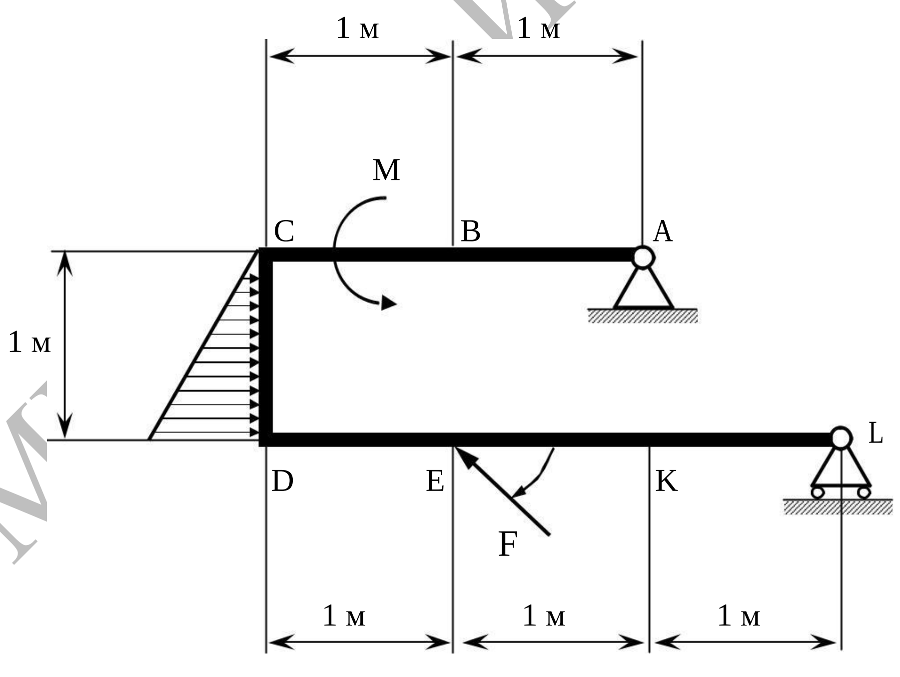


Рисунок С3 – Вариант № 5

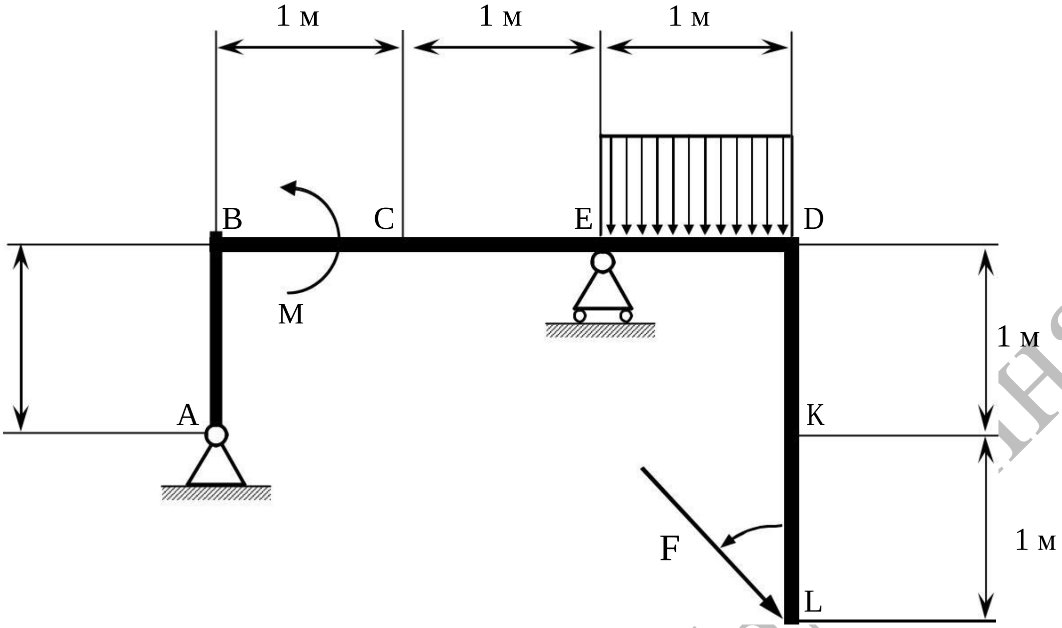


Рисунок С3 – Вариант № 6

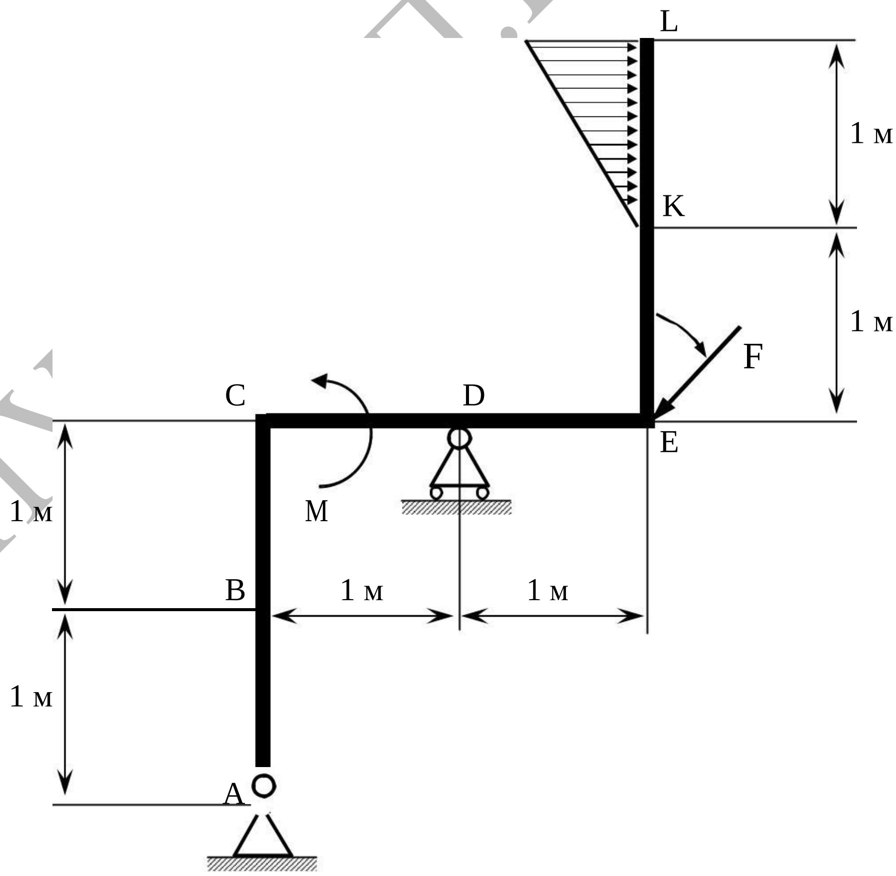


Рисунок С3 – Вариант № 7

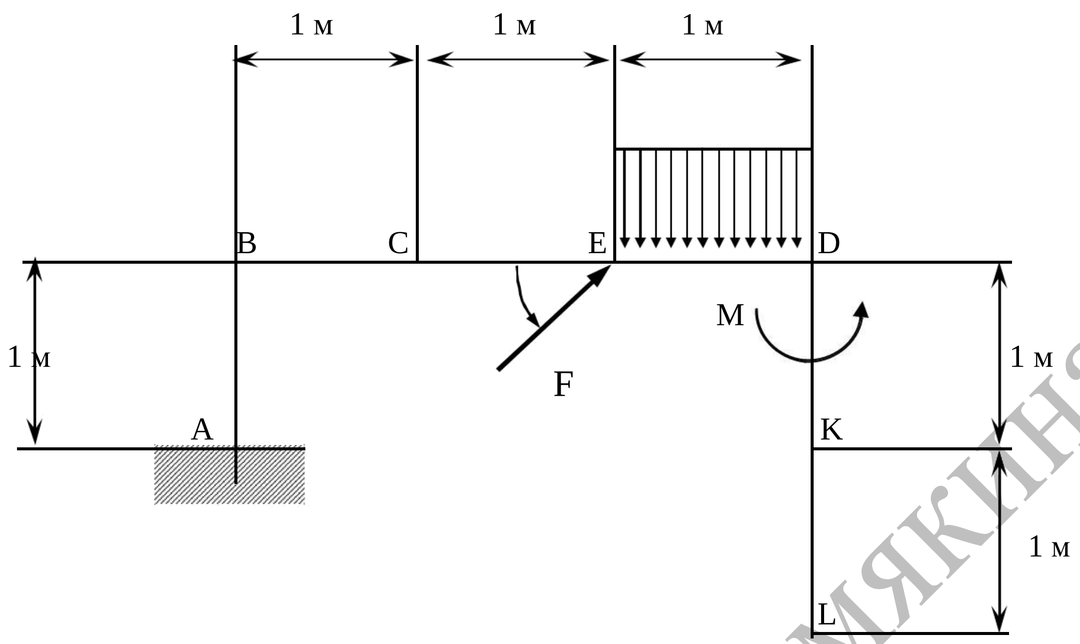


Рисунок С3 – Вариант № 8

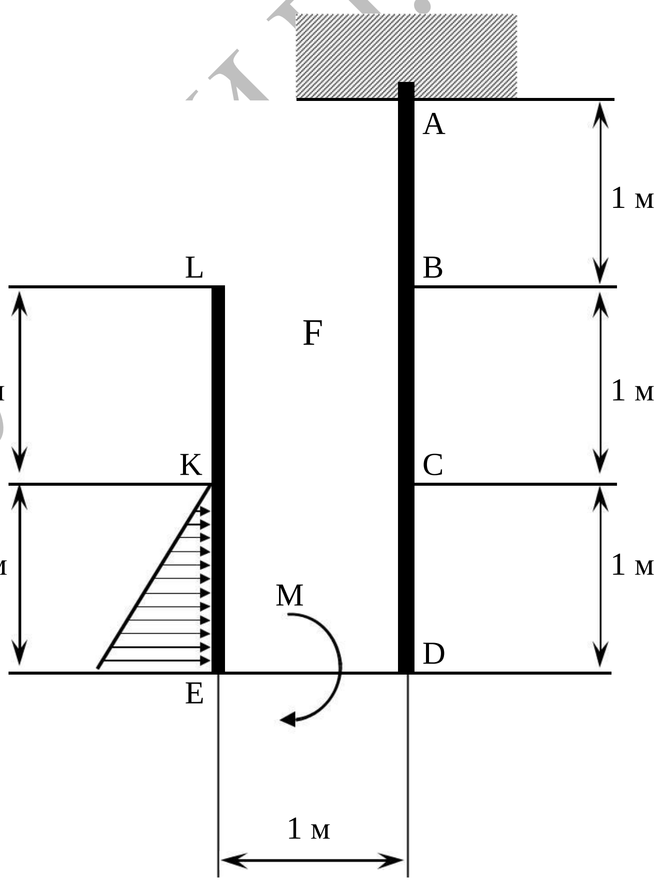


Рисунок С3 – Вариант № 9

2.4 Задача С4

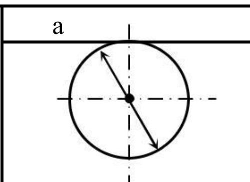
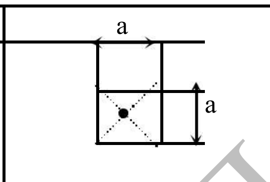
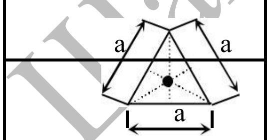
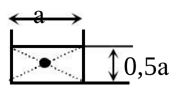
Условие задачи

Однородная тонкая пластина имеет форму, представленную на рисунке С4. В пластине вырезано два отверстия. Форма и расположение первого отверстия указаны на рисунке С4. Форма и расположение второго отверстия указаны в таблице 4.

Определить координаты центра тяжести пластины (в ответе указать координаты как по оси абсцисс, так и по оси ординат).

При решении задачи учесть, что a = 1 м.

Таблица 4 – Данные к задаче С 4

Сила				
Номер условия	Центр отверстия	Центр отверстия	Центр отверстия	Центр отверстия
0	A	–	–	–
1	–	–	C	–
2	B	–	–	–
3	–	–	–	D
4	–	A	–	–
5	–	–	D	–
6	–	–	–	C
7	B	–	–	–
8	–	D	–	–
9	–	–	–	A

Комментарий к задаче

Задача С4 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков расчета системы параллельных сил и нахождения центра тяжести плоской фигуры. В этой задаче необходимо найти координаты центра тяжести плоской фигуры, а, следовательно, при решении задачи необходимо составлять два уравнения – отдельно для нахождения координаты по оси абсцисс и отдельно по оси ординат.

Условие задачи С4 может быть упрощено путем исключения заданного на рисунке отверстия, ограничившись включением в условие задачи отверстия из таблицы 4. Кроме того, задача может быть еще более упрощена за счет нахождения лишь одной координаты центра тяжести пластины

План решения задачи

1. Вычертить в подходящем масштабе на миллиметровой бумаге заданную пластину и нанести на нее в соответствии с условием задачи отверстия.

2. Составить систему из двух уравнений для нахождения координат центра тяжести пластины и выразить искомые координаты центра тяжести фигуры по осям абсцисс и ординат.

3. Составить проверочные уравнения и, подставив в них численные данные, подтвердить достоверность полученного решения.

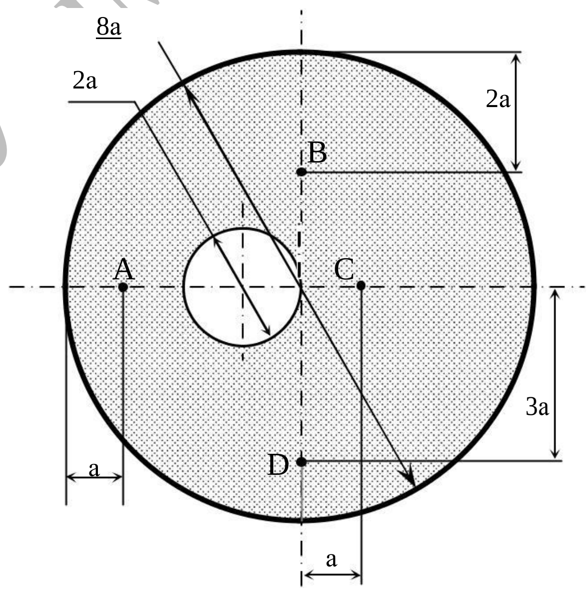


Рисунок С4 – Вариант № 0

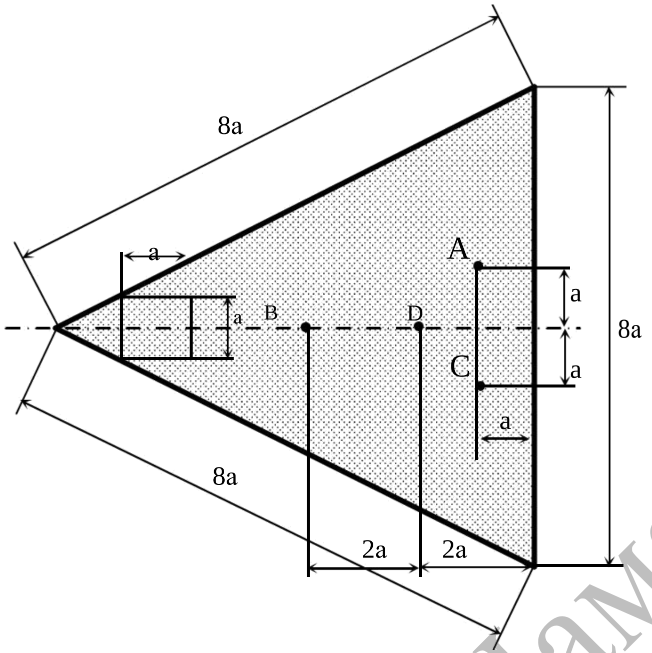


Рисунок С4 – Вариант № 1

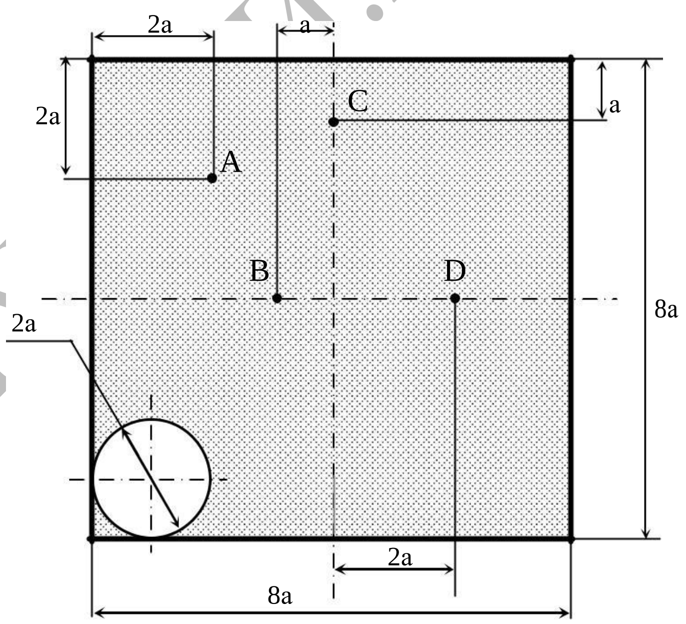


Рисунок С4 – Вариант № 2

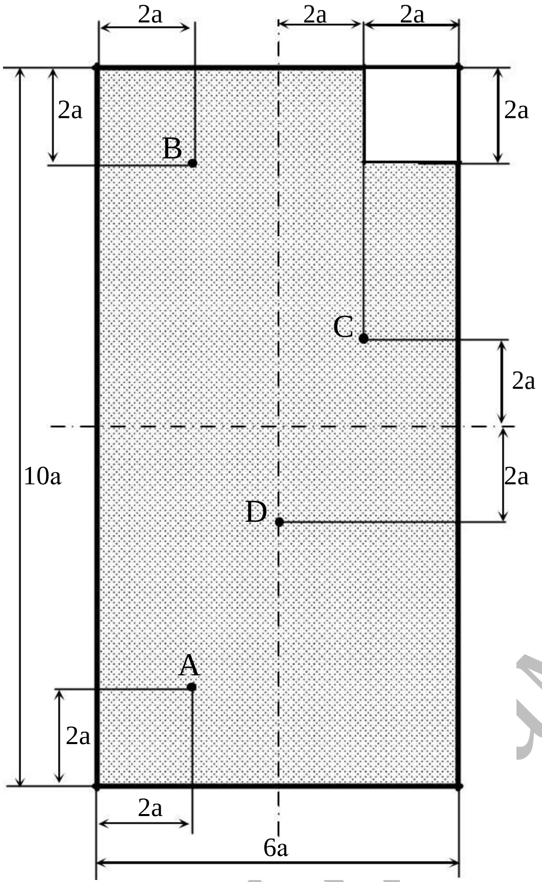


Рисунок С4 – Вариант № 3

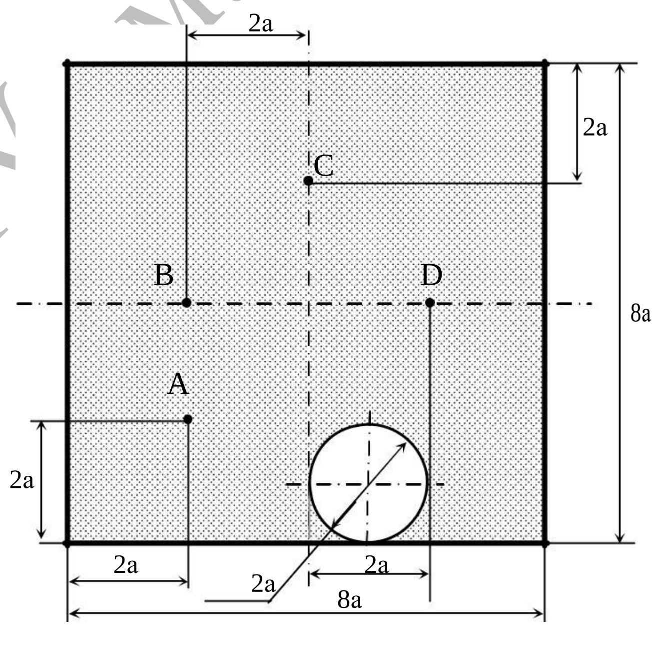


Рисунок С4 – Вариант № 4

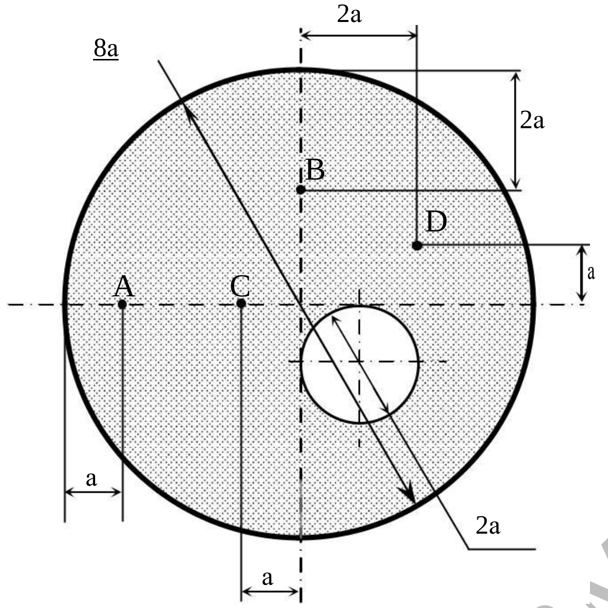


Рисунок С4 – Вариант № 5

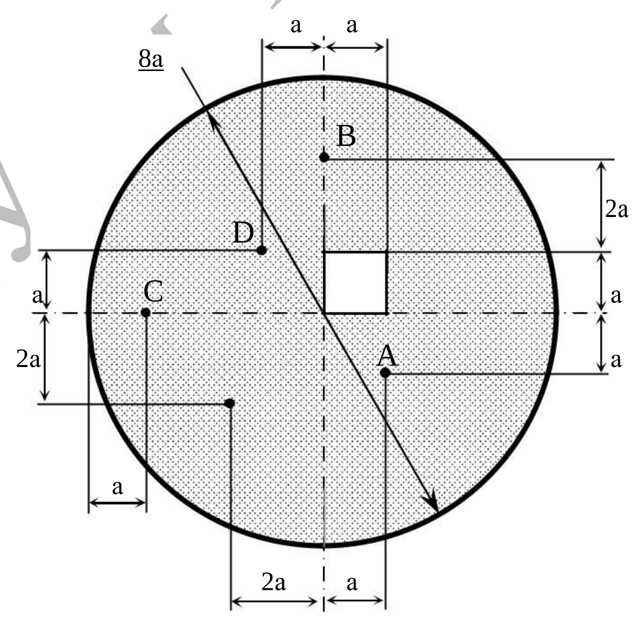


Рисунок С4 – Вариант № 6

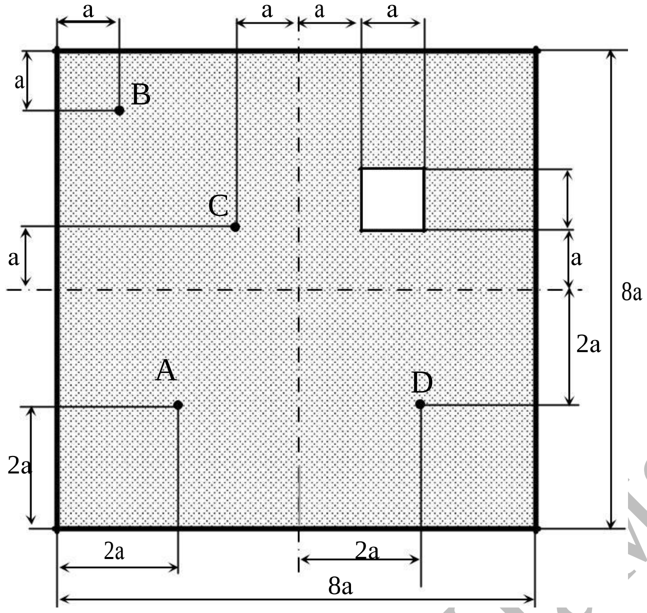


Рисунок С4 – Вариант № 7

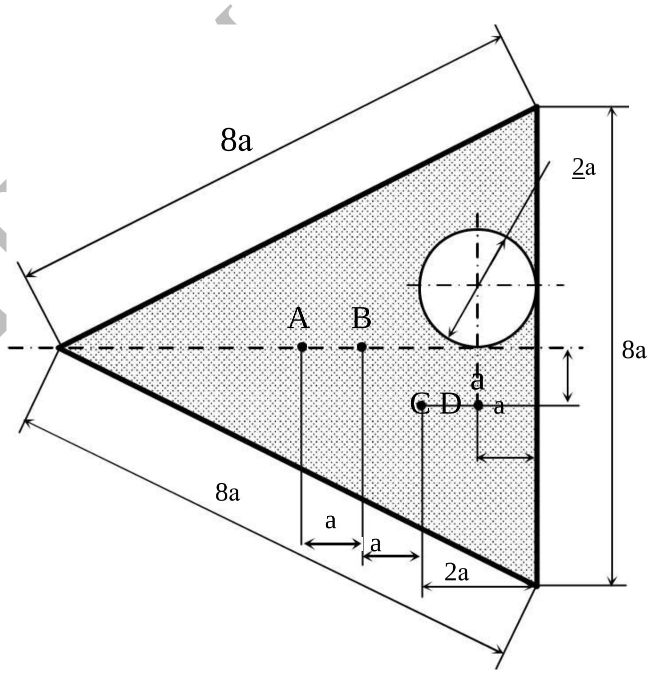


Рисунок С4 – Вариант № 8

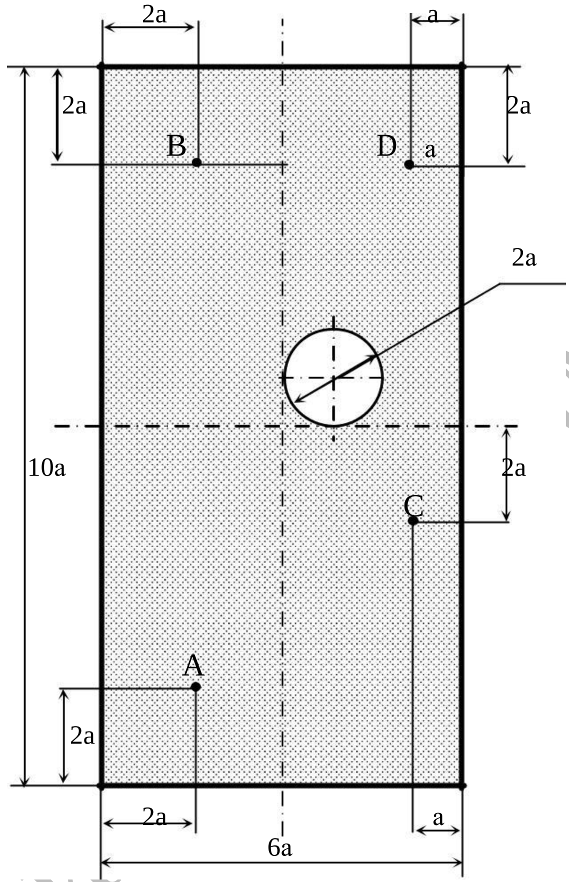


Рисунок С4 – Вариант № 9

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский, Н. Е Теоретическая механика / Н. Е. Жуковский. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 811 с.

2. Голубева, О. В. Теоретическая механика / О. В. Голубева. – М. : Высш. шк., 1968. – 487 с.

3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1974. – 478 с.

4. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1977. – Ч. 1. – 368 с.

5. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

6. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1984. – Т. 1. – 504 с.

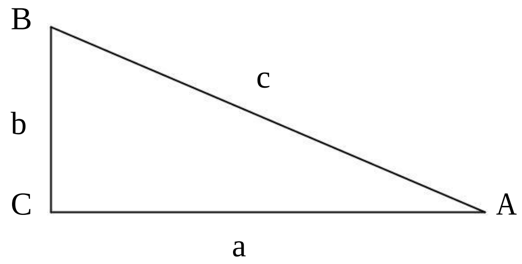
7. Осадчий, В. А. Руководство к решению задач по теоретической механике / В. А. Осадчий, А. М. Файн. – М. : Высш. шк., 1966. – 307 с.

8. Сборник задач по теоретической механике / В. Л. Канн [и др.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 480 с.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Ускорение силы тяжести g = 9,81 м/с^2.

2. Тригонометрические функции угла.



$\sin A \quad \frac{b}{c}; \quad \cos A \quad \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg} A \frac{b}{a}; \quad \operatorname{ctg} A \quad \frac{a}{b}.$

3. Тригонометрические функции важнейших углов.

Угол, град	Косинус	Синус	Тангенс
0	1	0	0
30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90	0	1	

4. Основные формулы тригонометрии.

$\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1, \qquad \sin 2 \quad 2\sin \ \cos \ , \qquad \cos 2 \quad \cos^2 \quad \sin^2 \ ,$

$\operatorname{tg} \quad \frac{\sin}{\cos}, \quad \operatorname{ctg} \quad \frac{\cos}{\sin}, \quad \operatorname{tg} \ \operatorname{ctg} \quad 1,$

$\frac{1}{\cos^2} \quad 1 \ \operatorname{tg}^2 \ , \quad \frac{1}{\sin^2} 1 \ \operatorname{ctg}^2 \ ,$

$\operatorname{tg} 2 \ \frac{2\operatorname{tg}}{1 - \operatorname{tg}^2}.$

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – основа инженерного мышления. Изучение законов и закономерностей движения и взаимодействия материальных тел закладывает теоретическую базу для дальнейшего изучения общетехнических и специальных дисциплин. Решение задач по теоретической механике формирует у студентов навыки практического использования теоретических знаний при расчете конкретных механизмов и конструкций.

В настоящее время опубликовано огромное количество учебников, учебных пособий и методических разработок по теоретической механике. Однако в большинстве работ объем теоретического материала и сложность предлагаемых задач превышают требования, предъявляемые к студентам инженерных и технических факультетов педагогических вузов.

В данном пособии подобран теоретический материал и контрольные задания по ключевым вопросам статики.

В первой главе пособия представлены краткие теоретические сведения по основным вопросам раздела «Статика» дисциплины «Теоретическая механика». При изложении теоретического материала основное внимание уделяется анализу основных формул, принципов и теорем, необходимых для решения задач.

Во второй главе представлен комплект из четырех контрольных задач по статике, каждая из которых включает в себя 100 вариантов заданий. Выбор варианта задания для конкретной задачи происходит следующим образом: выбираются две последние цифры зачетной книги (например, две последние цифры – 45); первая цифра означает номер рисунка в задаче (в примере, 4 – номер рисунка), вторая цифра означает номер строки в таблице, в которой приведены некоторые из начальных данных задачи (в примере, 5 – номер строки в таблице).

Следует отметить, что предлагаемые теоретические сведения и задачи не являются исчерпывающим материалом по статике, а соответствуют минимальным требованиям, предъявляемым к студентам инженерных и технических факультетов педагогических вузов.

Для углубленного изучения предмета необходима дальнейшая работа с источниками, приведенными в списке рекомендованной литературы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Определения и аксиомы статики

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами.

Теоретическая механика представляет собой часть механики, в которой изучаются *общие* закономерности движения и взаимодействия материальных тел.

Другую часть механики составляют различные общие и специальные дисциплины, посвященные проектированию и расчету всевозможных конкретных механизмов и сооружений. Все эти технические дисциплины в основе своей базируются на законах и методах теоретической механики.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и установление условий равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве в зависимости от действующих сил.

Механическим движением называется перемещение тела по отношению к другому телу, происходящее в пространстве и во времени.

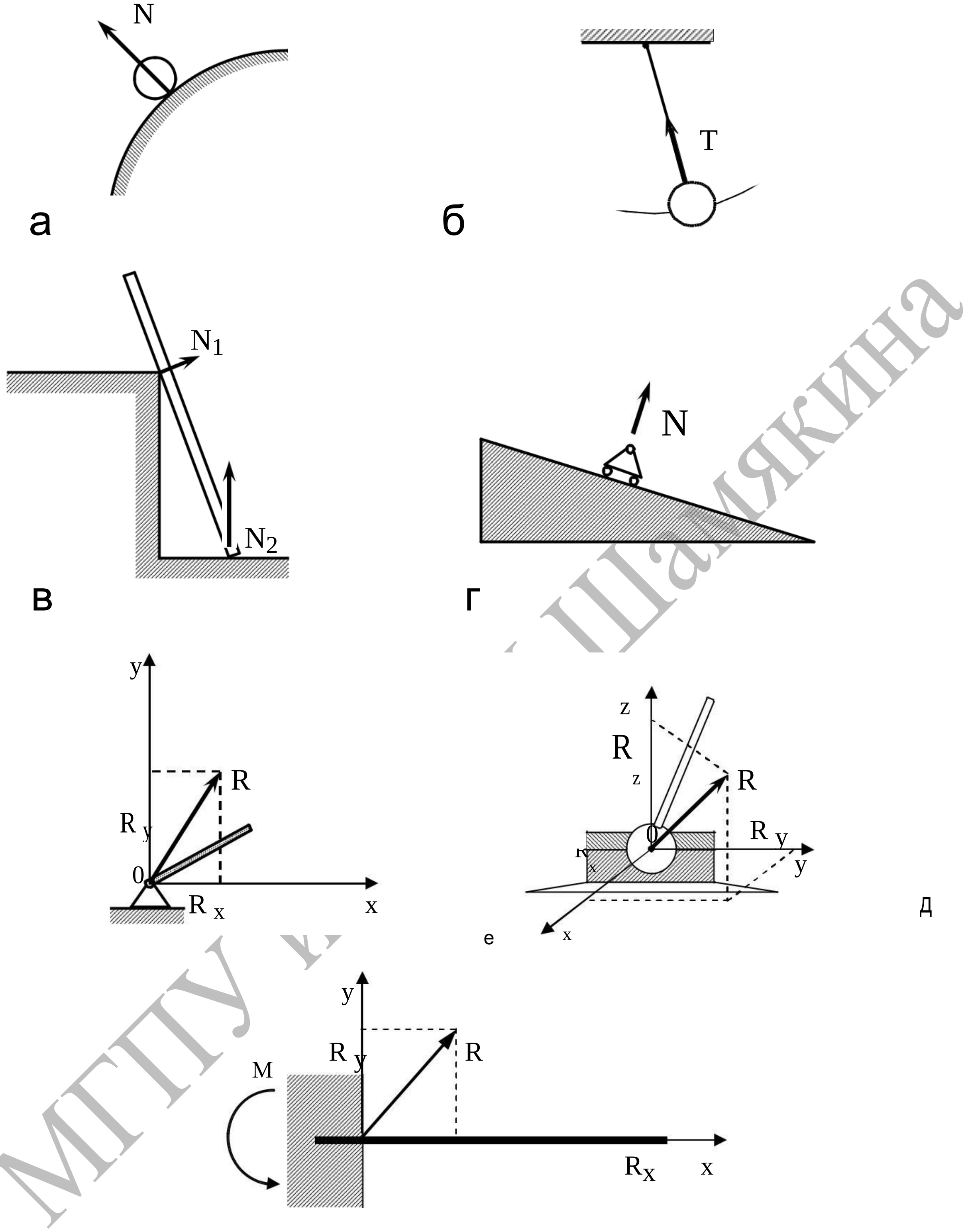
Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

Модели материальных тел:

материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу;

механической системой называется любая совокупность материальных точек;

абсолютно твердым телом (или неизменяемой механической системой) называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях.



а – тело находится на сферической поверхности;
б – тело подвешено на нити; в – тело на гладкой поверхности;
г – подвижная шарнирная опора; д – неподвижный цилиндрический шарнир;
е – неподвижный сферический шарнир и подпятник;
ж – жесткая заделка

Рисунок 1 – Связи и соответствующие им реакции связи

Все, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве называется *связью*.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется *силой реакции* (противодействия) *связи* или просто *реакцией связи* (рисунок 1).

Массой тела называется количественная мера инертности данного тела.

Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Силой в механике называется величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел.

Сила является величиной векторной, и ее действие на тело определяются следующими параметрами:

1) численная величина (модуль силы);

2) направление силы;

3) точка приложения силы.

Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

Равнодействующая сила – это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

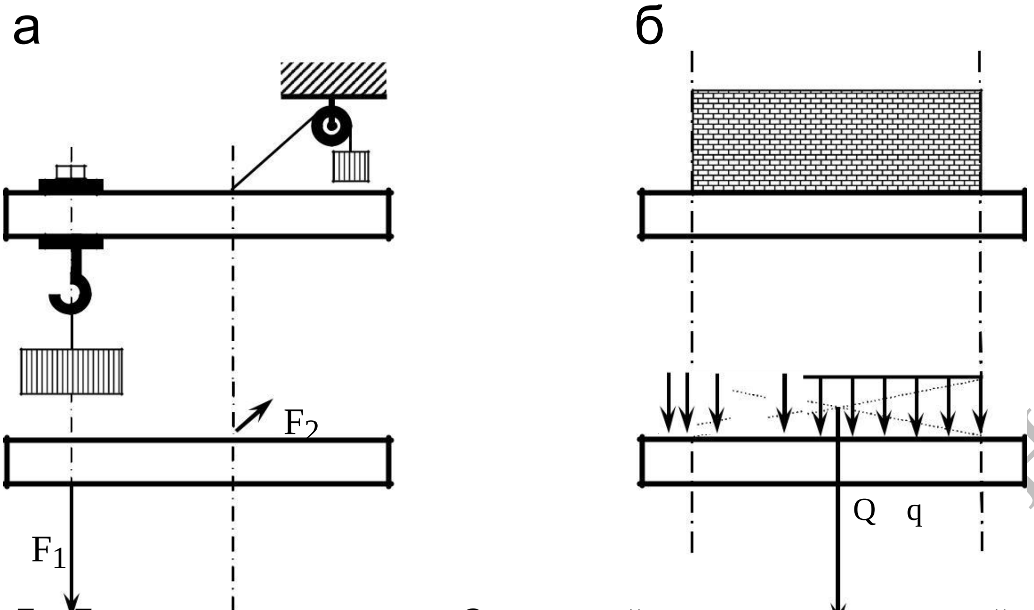
Сила, равная равнодействующей силе по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей силой*.

Внешние силы – это силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел.

Внутренние силы – это силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется *сосредоточенной* (рисунок 2а).

Силы, действующие на все точки данного объема или части поверхности тела, называются распределенными (рисунок 2б).



F_1 , F_2 – сосредоточенные силы Q – равнодействующая распределенной силы

Рисунок 2 – Примеры сосредоточенной (а) и распределенной (б) сил

Аксиома о равновесии системы двух сил

Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях.

Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю (рисунок 3). Если под действием сил F_1 и F_2 материальное тело находится в равновесии, то они образуют систему сил, эквивалентную нулю.

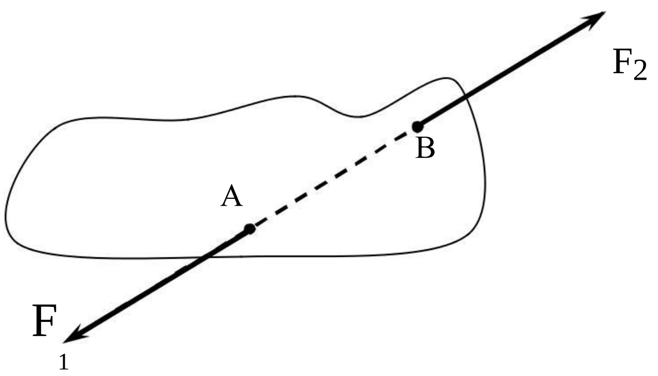


Рисунок 3 – Равновесие тела под действием системы двух сил

Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю

Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил.

Аксиома параллелограмма сил

Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах.

Замену двух сил F_1 и F_2 (рисунок 3а) одной равнодействующей силой F по правилу параллелограмма называют *векторным сложением сил*.

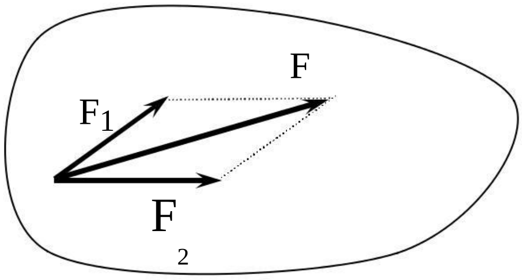


Рисунок 3а – Параллелограмм сил

Векторное сложение сил F_1 и F_2 математически выражают следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \quad (1)$$

Модуль равнодействующей силы F определяется по формуле:

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(F_1,F_2)} . \quad (2)$$

Направляющие равнодействующей силы F синусы находятся из выражений:

$$\sin(\hat{F,F_1}) = \frac{|F_2| \sin(\hat{F_1,F_2})}{|F|}; \qquad (3а)$$

$$\sin(\hat{F,F_2}) = \frac{|F_1| \sin(\hat{F_1,F_2})}{|F|}. \qquad (3б)$$

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.

Аксиома связей

Всякую связь можно отбросить и заменить силой реакции связи (в простейшем случае) или системой сил (в общем случае).

Аксиома отвердевания

Если деформируемое тело находится в равновесии, то его равновесие без изменения системы приложенных сил не нарушится от наложения на точки тела дополнительных связей, включая превращение деформируемого тела в абсолютно твердое.

Сформулированные аксиомы являются той основой, на которой строится вся статика сил, приложенных к твердому телу.

1.2 Сходящиеся силы

Системой сходящихся сил, или *пучком*, *называют систему сил* (например, система сил F_1, F_2, F_3, F_4, изображенная на рисунке 4), *линии действия которых пересекаются в одной точке – центре пучка* (точка О). Рассмотрим общий случай плоской системы сходящихся сил. Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор

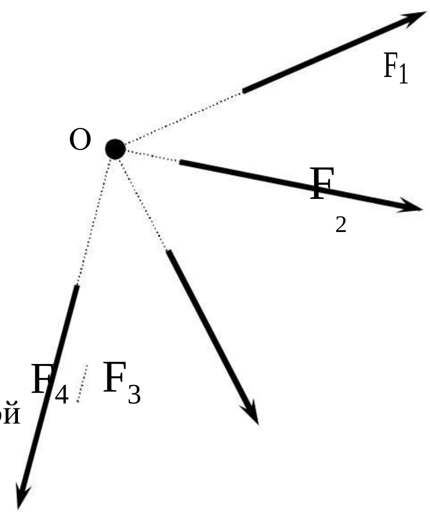


Рисунок 4 – Сходящиеся силы

скользящий, то можно считать, что силы системы (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) приложены в одной точке – центре пучка (точка О на рисунке 5а).

Найдем равнодействующую F системы сходящихся сил F_1 , F_2 , F_3 и F_4 методом параллелограммов.

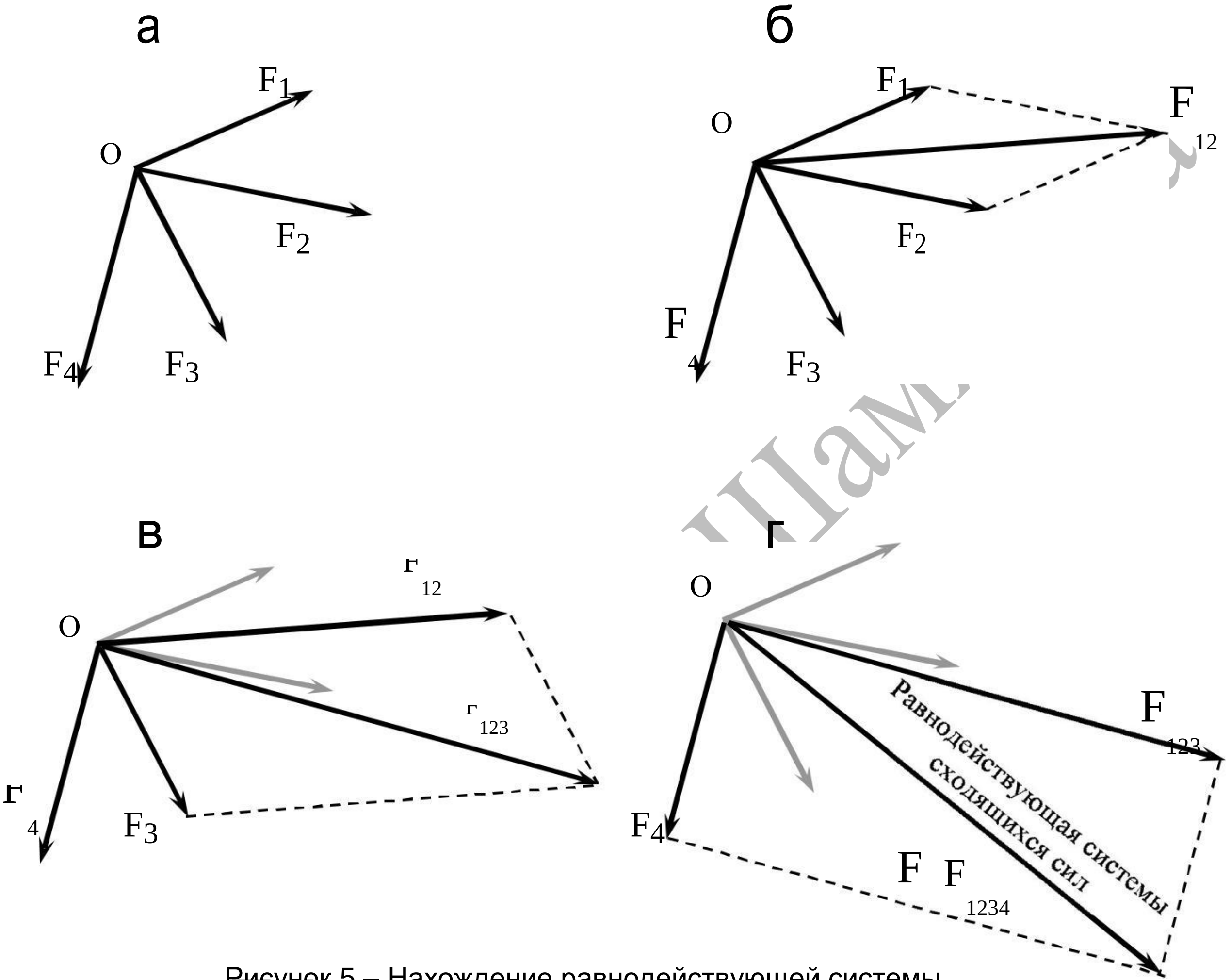


Рисунок 5 – Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) методом параллелограмма

Применяя к силам F_1 и F_2 пучка аксиому параллелограмма сил, заменим их одной равнодействующей силой F_{12} (рисунок 5б):

$$F_{12} \quad F_1 \quad F_2 .$$

Затем по правилу параллелограмма складываем силы F_{12} , F_3 и находим их равнодействующую (рисунок 5в):

$$F_{123} \quad F_{12} \quad F_3 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 .$$

Следует отметить, что на рисунке 5 серыми стрелками отмечено расположение векторов сил F_1 , F_2 , F_3 .

Аналогично складываем силы F_{123} , F_4 и получаем (рисунок 5г):

$$F \quad F_{1234} \quad F_{123} \quad F_4 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 .$$

Сила F_{1234} является равнодействующей плоской системы сходящихся сил, которую обозначаем F .

Аналогичным образом можем найти равнодействующую системы, состоящей из n сходящихся сил, которую можно представить в виде:

$$F = F_{1,2,\ldots,n-1} + F_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i . \qquad (4)$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе F , которая является равнодействующей этой системы сил.

Процесс последовательного применения к силам правила параллелограмма или их векторного сложения приводит к построению *силового многоугольника*. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой силы (рисунок 6).

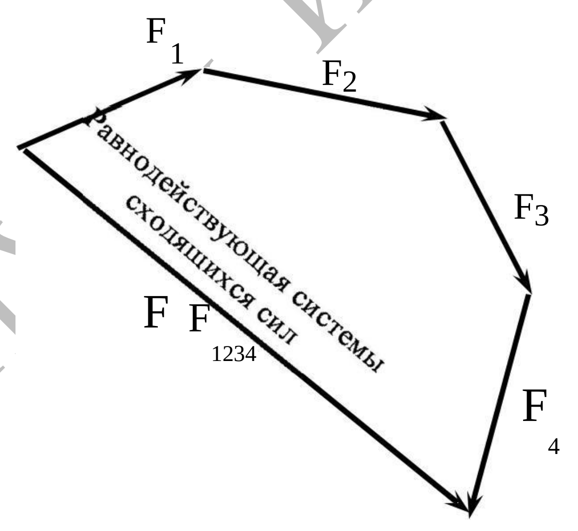


Рисунок 6 – Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) методом силового многоугольника

Важно заметить, что система сходящихся сил в общем случае приводится к одной силе – равнодействующей этой системы сил, которая изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на силах системы.

Равнодействующая сила в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, то есть изображается *замыкающей* силового многоугольника.

Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является *пространственной* фигурой, для плоской – *плоской* фигурой.

Спроецируем векторы равенства (4) на прямоугольные оси координат.

Проекции замыкающей найдутся из следующих выражений:

$$\vec{F}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}, \qquad \vec{F}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy}, \qquad \vec{F}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz}. \tag{5}$$

Модуль равнодействующей силы F и косинусы углов ее с осями координат определяются по формулам:

$$\left|F\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz}\right)^2}, \tag{6}$$

$$\cos\left(F, e_x\right) = \frac{F_x}{R}, \tag{7а}$$

$$\cos\left(F, e_y\right) = \frac{F_y}{R}, \tag{7б}$$

$$\cos\left(F, e_z\right) = \frac{F_z}{R}, \tag{7в}$$

где e_x , e_y , e_z – единичные векторы прямоугольной системы координат.

В случае плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей выбирают перпендикулярно силам (например, ось Oz), то есть:

$$F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

В случае если в силовом многоугольнике системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, конец последней силы совпадает с началом первой силы, то такой силовой многоугольник называют *замкнутым* (рисунок 7).

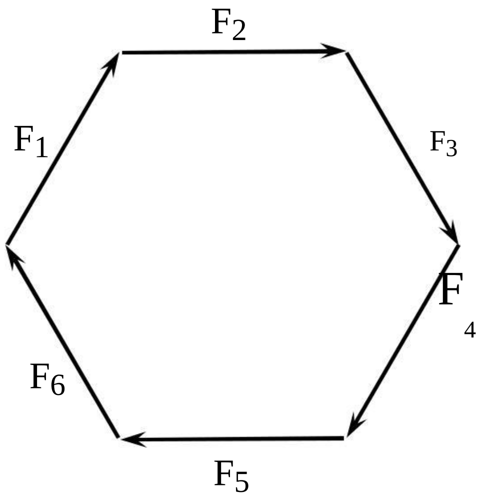


Рисунок 7 – Замкнутый силовой многоугольник

Условие равновесия в геометрической форме: для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

Условие равновесия в *аналитической форме*:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \qquad (8)$$

то есть *для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю*.

В случае плоской системы сходящихся сил условие равновесия в аналитической форме имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$$

то есть *для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных координатных осей, лежащих в плоскости сил, были равны нулю*.

1.3 Параллельные силы. Центр тяжести

Теорема о равнодействующей системы параллельных сил

Две собственно параллельные силы приводятся к равнодействующей, направленной параллельно составляющим силам и равной их арифметической сумме. Линия действия равнодействующей делит внутренним образом отрезок, соединяющий точки приложения составляющих сил на части, обратно пропорциональные величинам этих отрезков.

▲[1] Пусть на абсолютно твердое тело действуют две силы, линии действия которых параллельны и силы направлены в одну сторону – *собственно параллельные силы*. Предположим, что в точках А и В (рисунок 8) к твердому телу приложены собственно параллельные силы F_1 и F_2 .

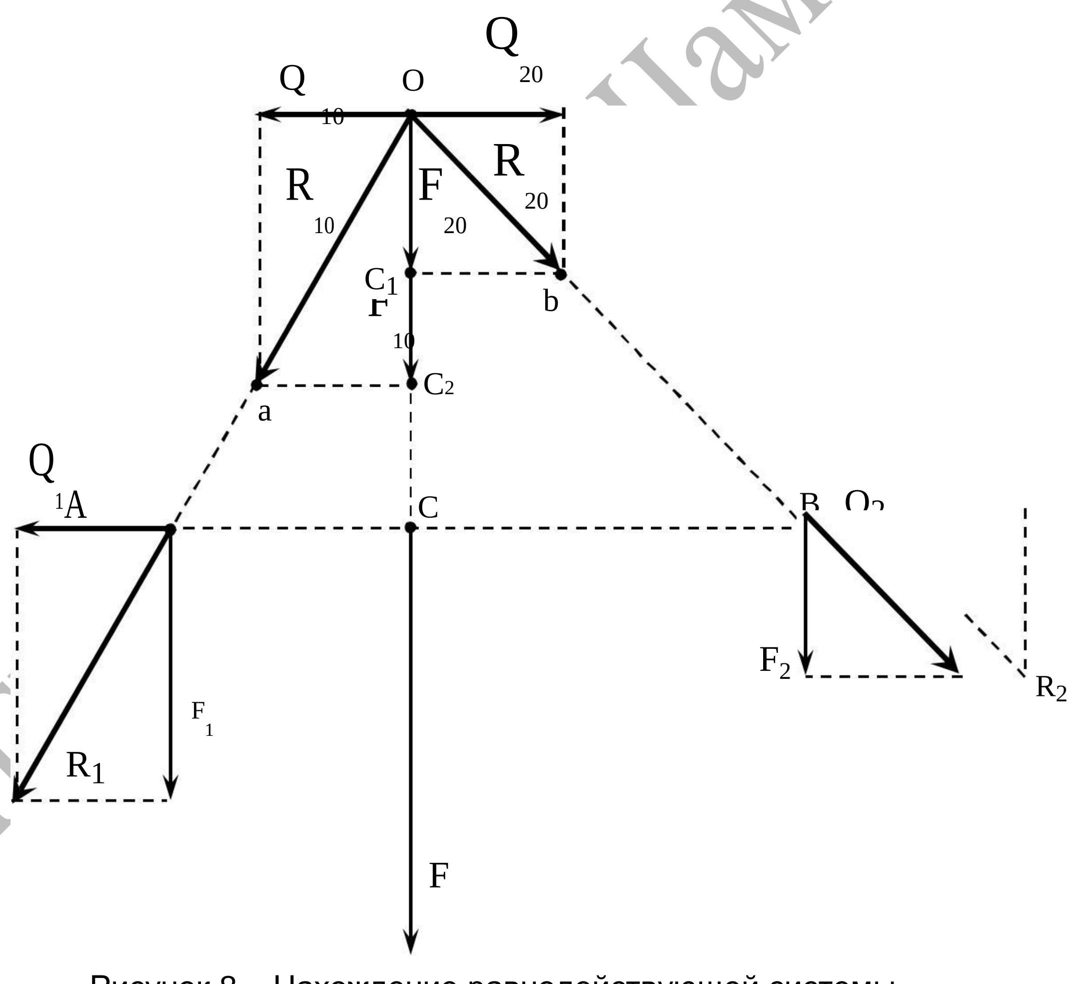


Рисунок 8 – Нахождение равнодействующей системы двух параллельных сил, направленных в одну сторону

[1] Символ ▲ обозначает начало и конец доказательства теоремы.

Добавим уравновешенную систему сил Q_1 и Q_2, приложенных в точках A и B, равных друг другу по величине и направленных вдоль AB в противоположные стороны.

Заменим силы F_1 и Q_1 равнодействующей R_1, а силы F_2 и Q_2 – равнодействующей R_2. Перенесем силы R_1 и R_2 вдоль линии их действия в точку O и разложим каждую из них на составляющие. Систему сил Q_{10} и Q_{20} отбрасываем как уравновешенную, а силы F_{10} и F_{20} складываем. Поскольку $|F_1| = |F_{10}|$ и $|F_2| = |F_{20}|$, то сила F будет равна арифметической сумме величин F_1 и F_2.

Таким образом, получаем, что $|\bar{F}| = |\bar{F}_1| + |\bar{F}_2|$.

Положение линии действия равнодействующей определяется точкой C – точкой пересечения линии действия равнодействующей F с отрезком AB.

Так как ΔAOC подобен ΔaOC_2, то $\frac{AC}{Q_{10}} = \frac{OC}{F_{10}}$.

Из подобия ΔCOB и ΔC_1Ob получаем: $\frac{CB}{Q_{20}} = \frac{OC}{F_{20}}$, и так как $|Q_{10}| = |Q_{20}|$, то из полученных пропорций находим:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{|F_{20}|}{|F_{10}|} = \frac{|F_2|}{|F_1|}. \blacktriangle \qquad (9)$$

В случае пространственной системы двух собственно параллельных сил точка пересечения равнодействующей силы и отрезка, соединяющего точки приложения этих сил, находится следующим образом.

Пусть точки приложения сил F_1 и F_2 (рисунок 9) заданы радиусами-векторами r_1 и r_2. Радиус-вектор r фиксирует точку пересечения (точка C) линии действия равнодействующей и отрезка AB. Из рисунка 9 следуют очевидные равенства: $\bar{r} - \bar{r}_1 = \overline{AC}$ и $\bar{r}_2 - \bar{r} = \overline{CB}$. Подставляя эти равенства в выражение (9), получаем:

$$r \; r_1 \qquad \frac{|F_2|}{|F_1|} r_2 \;\; r \quad ,$$

$$r \quad \frac{|F_1| r_1 \quad |F_2| r_2}{|F_1| \quad |F_2|}. \tag{10}$$

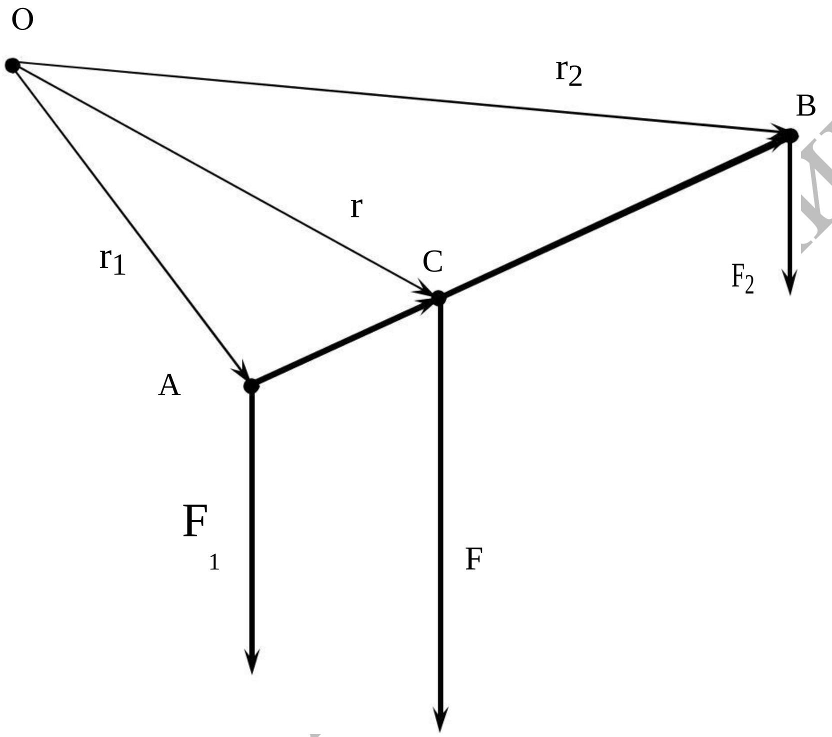


Рисунок 9 – Нахождение равнодействующей системы параллельных сил в общем случае

Пусть на абсолютно твердое тело действуют три собственно параллельные силы F_1, F_2 и F_3 , приложенные в точках, определяемых радиус-векторами r_1 , r_2 и r_3 (рисунок 9а). Складывая силы F_1 и F_2 , получим их равнодействующую F_{12} :

$$F_{12} \quad F_1 \quad F_2 \, ,$$

причем радиус-вектор r_{12} определится по формуле (10).

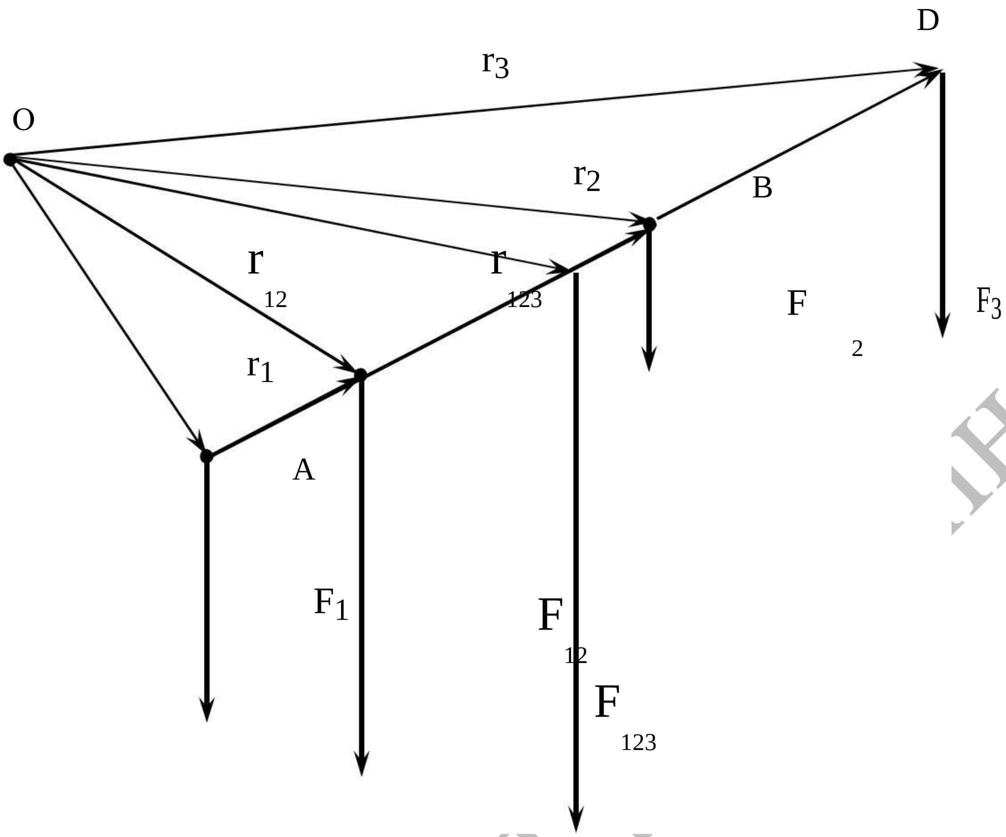


Рисунок 9а – Нахождение равнодействующей системы трех параллельных сил

Далее, складывая силы F_{12} и F_3 , получаем равнодействующую F_{123} :

$$|\bar{F}_{123}| = |\bar{F}_{12}| + |\bar{F}_3| = |F_1| + |\bar{F}_2| + |F_3|.$$

Радиус-вектор r_{123} , определяющий ее линию действия, будет найден из выражения:

$$r_{123} = \frac{|F_{12}|\, r_{12} + |F_3|\, r_3}{|F_{12}| + |F_3|},$$

или, с учетом формулы (10), получаем:

$$r_{123} = \frac{|F_1|\, r_1 + |F_2|\, r_2 + |F_3|\, r_3}{|F_1| + |F_2| + |F_3|}.$$

Аналогично можно показать, что если к телу приложено n собственно параллельных сил F_1, F_2 , …, F_n , то линия действия проходит через точку, радиус-вектор которой равен:

$$\vec{r} = \frac{|\vec{F}_1|\vec{r}_1 + |\vec{F}_2|\vec{r}_2 + \ldots + |\vec{F}_n|\vec{r}_n}{|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + \ldots + |\vec{F}_n|} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|\vec{F}_i|\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}|\vec{F}_i|}, \qquad (11)$$

при этом модуль равнодействующей находится из выражения:

$$|\vec{F}| = \sum_{i=1}^{n}|\vec{F}_i|. \qquad (12)$$

Точка, радиус-вектор которой определяется выражением (11), называется *центром параллельных сил*. Проецируя радиус-вектор (11) на прямоугольные оси координат, получаем:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{ix} x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{ix}}, \qquad (13а)$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{iy} y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{iy}}, \qquad (13б)$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{iz} z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_{iz}}. \qquad (13в)$$

Для определения центра тяжести механической системы выделим в ней достаточно малые частицы объема ΔV_n. К каждому из них приложим силу тяжести ΔQ_n, равную:

$$\Delta Q_i = \gamma_i \Delta V_i .$$

Равнодействующая этих параллельных сил по модулю равна весу тела:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i V_i .$$

Радиус-вектор центра тяжести тела, который обозначим через r_c , найдем из формулы (11) как центр параллельных сил:

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i V_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i V_i} . \qquad (14)$$

Используя формулу (14), можно определить *центр тяжести механической системы.*

Если механическая система представляет собой тело, то в пределе сумма в формуле (14) обращается в интеграл и радиус-вектор r_c может быть вычислен по формуле:

$$r_c = \frac{\int_V \gamma r dV}{\int_V \gamma dV} . \qquad (15)$$

В случае, если тело однородно (γ = const), то формулу (15) можно записать в виде:

$$r_c = \frac{\int_V r dV}{V} . \qquad (16)$$

Методы вычисления центра тяжести:

метод симметрии; метод

разделения на части;

метод отрицательных масс;

метод интегрирования.

Определение центра тяжести стандартных фигур

А. Центр тяжести части дуги окружности лежит на ее оси симметрии Ох (рисунок 10) на расстоянии от центра О, равном:

$$x_C \; R \; \frac{\sin}{} \; . \qquad (17)$$

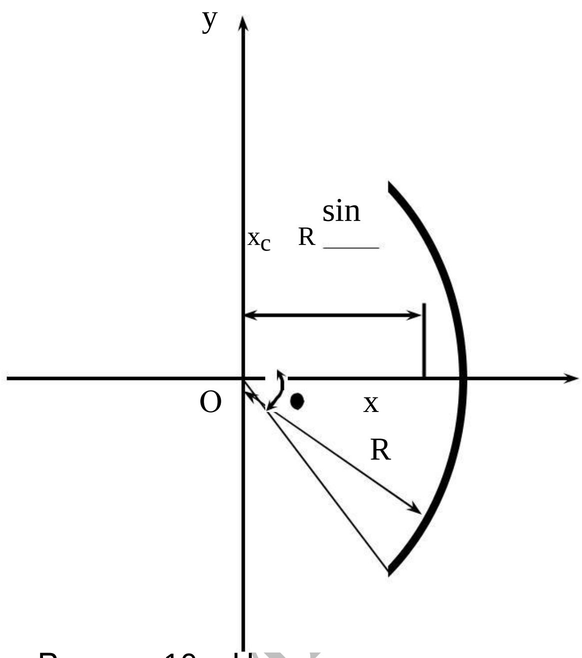


Рисунок 10 – Центр тяжести части дуги

Б. Центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан (рисунок 11), причем:

$$CE \quad \frac{1}{3} BE \, . \qquad (18)$$

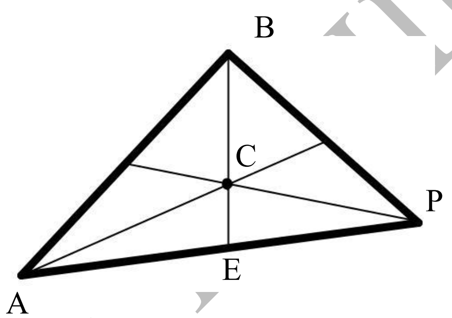


Рисунок 11 – Центр тяжести площади треугольника

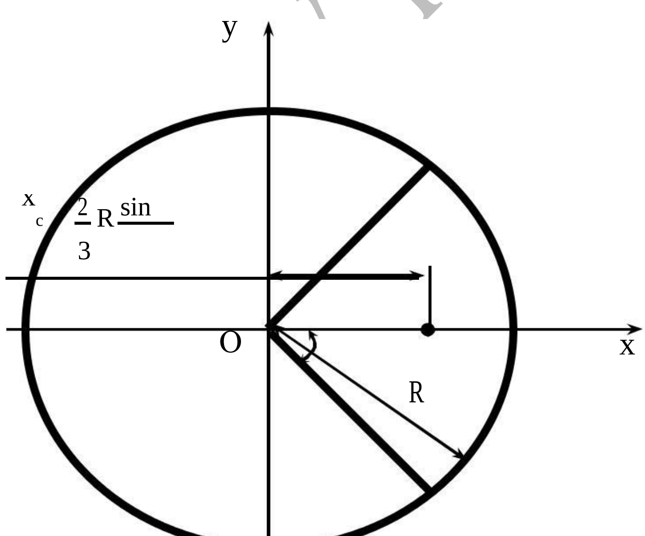


Рисунок 12 – Центр тяжести кругового сектора

В. Центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии Ох (рисунок 12) на расстоянии от центра О, равном:

$$x_C \quad \frac{2}{3} R \frac{\sin}{} \; . \qquad (19)$$

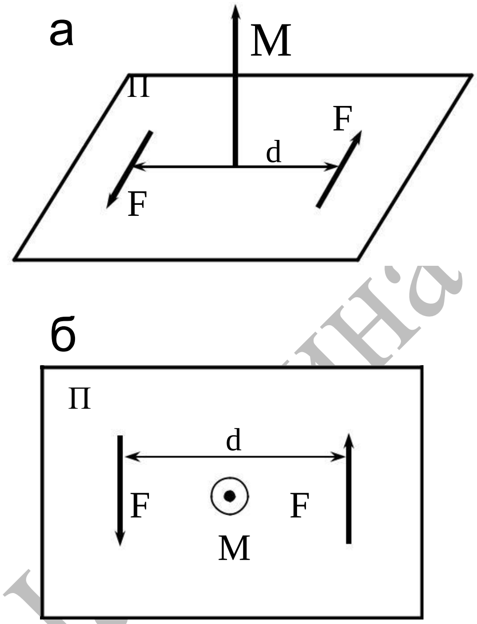
1.4 Пара сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рисунок 13).

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Расстояние d между линиями действия сил пары называется плечом силы.

Вектор момента пары направлен перпендикулярно плоскости действия пары так, что если смотреть с его конца, то пара сил будет стремиться повернуть тело против часовой стрелки.



а – общий вид;
б – вид сверху
Рисунок 13 – Пара сил

Модуль векторного момента пары сил равен произведению плеча пары d на модуль силы:

$$|M| = |F|\,d. \tag{20}$$

Момент пары считается *положительным*, если пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и *отрицательным* – по ходу часовой стрелки.

Теорема о переносе пары сил в плоскости действия

Пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно перенести в любое место на ее плоскости действия.

▲ Пусть дана некоторая пара сил F_A, F_B с плечом d (рисунок 14). Выберем в плоскости действия пары отрезок CD длиной d и приложим к его концам силы F_C, F_C, F_D, F_D, перпендикулярные отрезку CD и равные по модулю. Перенесем силы F_A и F_D вдоль их линий действия в точку T и найдем их равнодействующую R_T. Выполняя аналогичные операции с силами F_B и F_C, получим приложенную в точке E равнодействующую R_E. Так как модули равнодействующих R_T и R_E

равны, линии действия совпадают, направления противоположны, то они образуют уравновешенную систему сил, которую можно отбросить.

Таким образом, вместо первоначальной пары F_A, F_B получим пару F_C, F_D, эквивалентную первоначальной, но расположенную в плоскости действия пары наперёд заданным образом. ▲

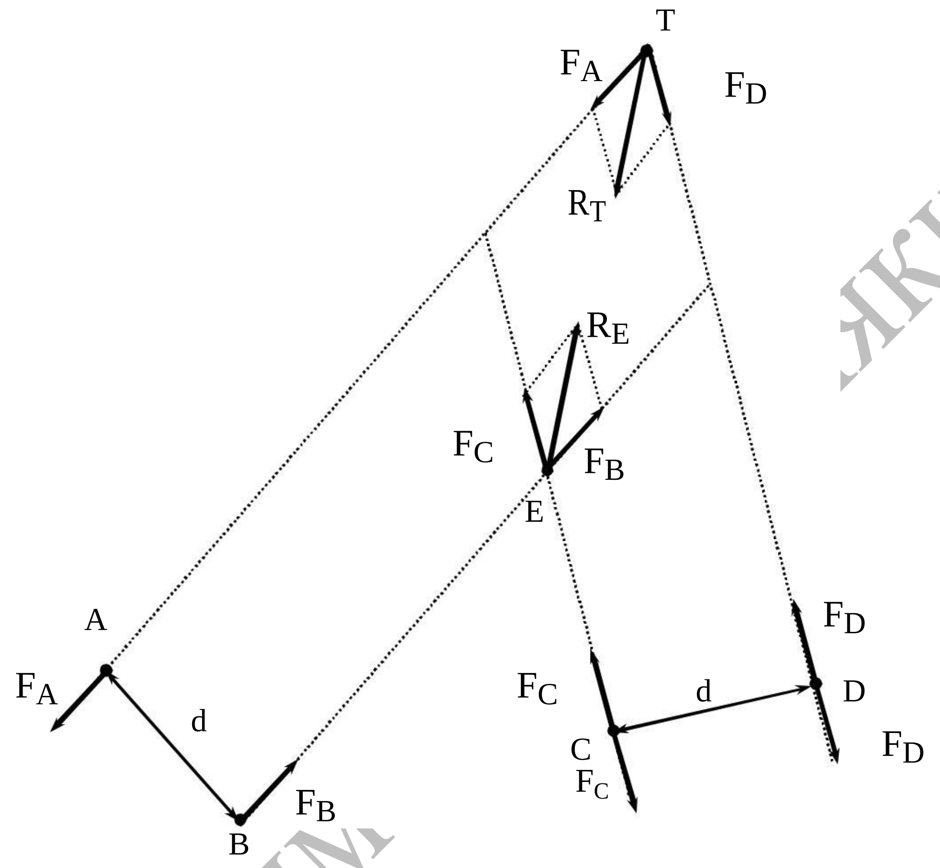


Рисунок 14 – Доказательство теоремы о переносе пары сил в плоскости действия

Теорема о переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости действия

Пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.

▲ Рассмотрим пару сил F_A, F_B в плоскости Π_1 (рисунок 15). Спроектируем отрезок AB на плоскость Π_2, параллельную Π_1. Приложим в точках C и D взаимно уравновешивающиеся силы F_C, F_C, F_D, F_D, равные по модулю силам F_A, F_B и имеющие параллельные линии действия.

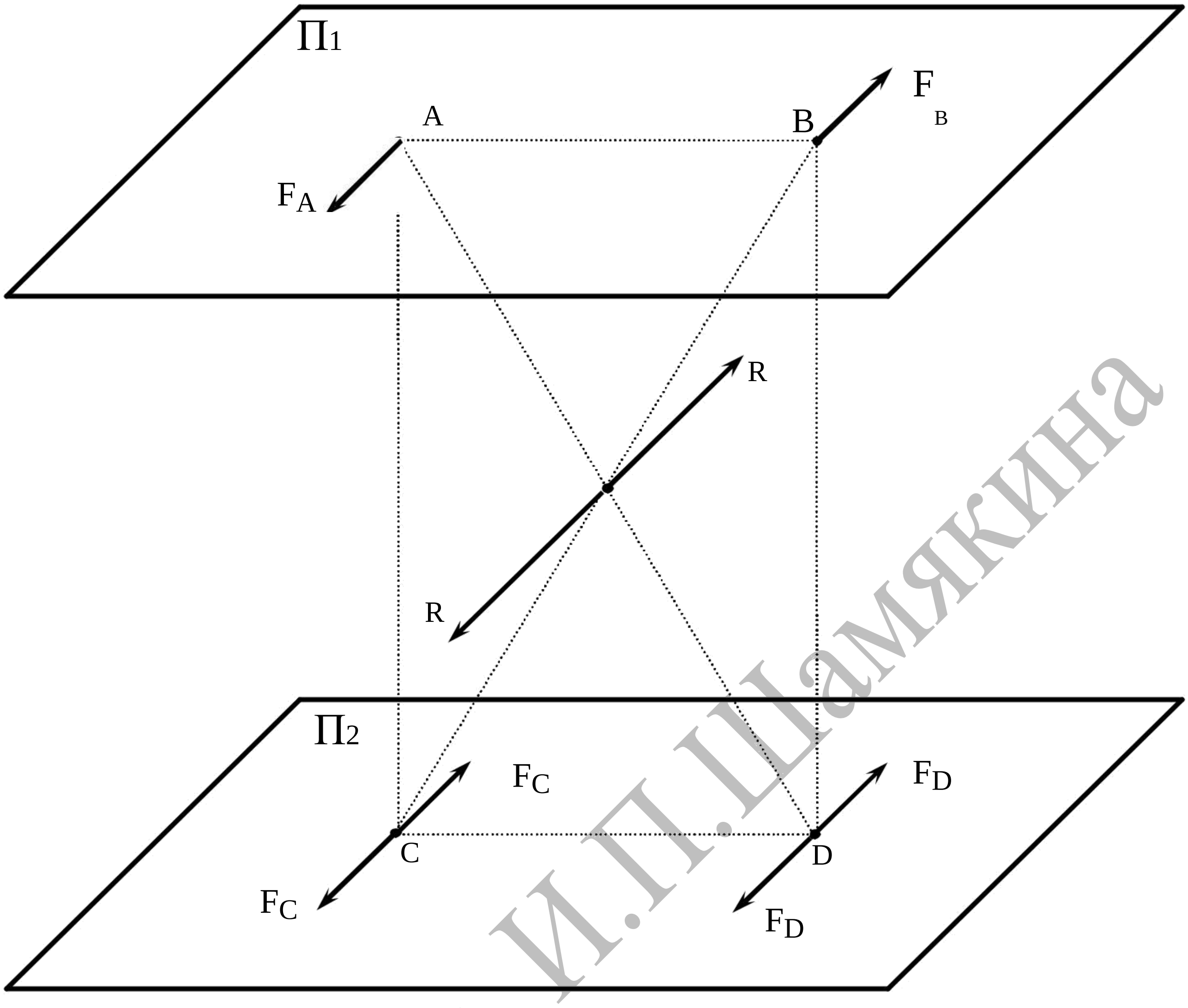


Рисунок 15 – Доказательство теоремы о переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости действия

Силы F_B и F_C можно заменить равнодействующей R , линия действия которой проходит через середину диагонали ВС. Аналогично силы F_A и F_D дадут равнодействующую R , такую же по величине и с той же линией действия, но направленную противоположно первой.

Две силы R и R взаимно уравновешиваются и их можно отбросить. Таким образом, остается пара сил в плоскости $П_2$, эквивалентная первоначальной. Теперь, согласно теореме о переносе пары сил в плоскости действия, мы можем перенести ее в любое место плоскости $П_2$. ▲

Теорема об эквивалентности пар сил

Пары сил, имеющие равные векторные моменты, эквивалентны.

▲ Пусть дана пара сил F, F с плечом d_1, пара сил P, P с плечом d_2 (рисунок 16а). Заменим силу F , приложенную в точке B (рисунок 16б), двумя параллельными силами: силой F P , приложенной в точке A, и силой P , приложенной в точке C.

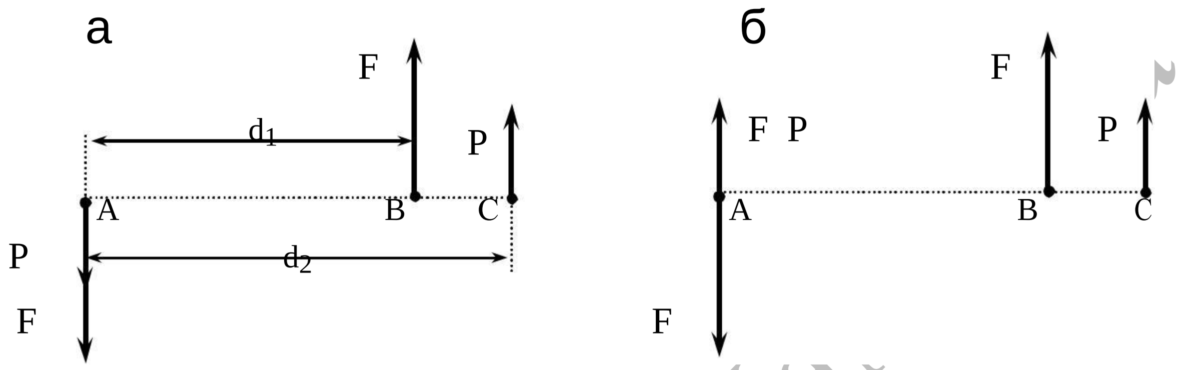


Рисунок 16 – Доказательство теоремы об эквивалентности пар

Складывая силу F P с силой F , получим силу P . Итак, вместо пары F, F мы теперь имеем пару P, P . Так как сила F является равнодействующей сил F P и F , то справедливо равенство: $\frac{|F|\quad|P|}{BC}\quad\frac{|P|}{AB}$. Отсюда следует, что $|F|AB\quad|P|\quad AC$,пары сил F, F и P, P эквивалентны. ▲

Теорема о равнодействующей пар сил

Векторный момент равнодействующей пар сил равен геометрической сумме векторных моментов составляющих пар.

▲ Рассмотрим пары F_1, F_1 и F_2 , F_2 , расположенных в пересекающихся плоскостях $П_1$ и $П_2$ (рисунок 17). Преобразуем силы, составляющие пары, которые при этом станут равными F_{1A} , F_{2A} , F_{1B} и F_{2B} . Сложим соответствующие силы: $R_A = F_{1A} + F_{2A}$, $R_B = F_{1B} + F_{2B}$, но так как $F_{1B} = – F_{1A}$, $F_{2B} = –F_{2A}$, то $R_A = – R_B$. Таким образом, силы R_A и R_B образуют пару. Эта пара эквивалентна первоначальным двум и поэтому называется *равнодействующей.* ▲

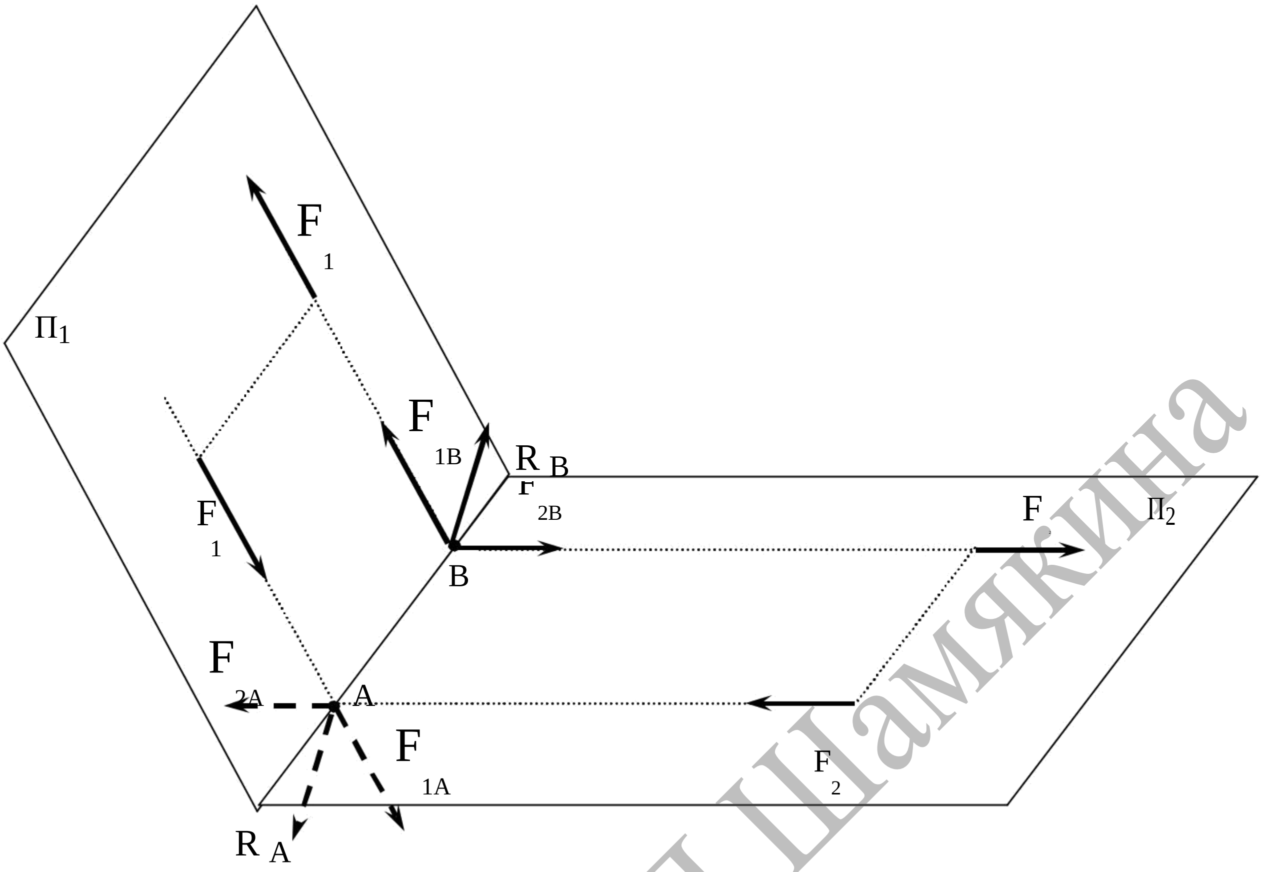


Рисунок 17 – Доказательство теоремы
о равнодействующей пар сил

Таким образом, момент равнодействующей пары равен:

$$\vec{M}(\vec{R}_A, \vec{R}'_A) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2).$$

В общем случае равнодействующий векторный момент равен:

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_i, \vec{F}'_i). \qquad (21)$$

Условие равновесия системы пар сил:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) = 0. \qquad (22)$$

1.5 Момент силы

Момент силы относительно точки

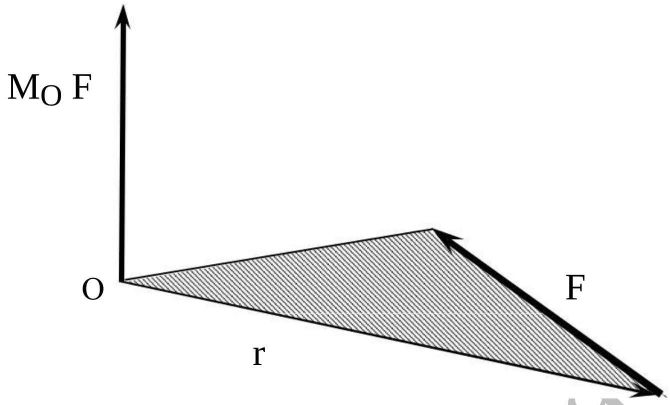


Рисунок 18 – Векторный момент силы относительно точки

Пусть к телу в точке А приложена сила F (рисунок 18). Выберем любую точку О и проведем из нее радиус-вектор r , идущий в точку приложения этой силы.

Векторным моментом силы F *относительноточки* О *называется свободный вектор, определяемый векторным произведением радиус-вектора* r *и силы* F .

Обозначая его через $M_O F$, имеем:

$$M_O F \quad r \; F. \tag{23}$$

Вектор $M_O F$ по модулю равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах r и F .

Направлен вектор $M_O F$ перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами r и F , так, что если смотреть с его конца на эту плоскость, то сила F будет стремиться повернуть тело вокруг точки О против часовой стрелки. Обычно вектор $M_O F$ считается приложенным в точке О.

Если сила F отлична от нуля, то векторный момент равен нулю только в том случае, когда точка О лежит на линии действия силы F .

В системе единиц СИ размерность момента силы относительно точки равна $[M_O F] = Н\,м$.

Из определения векторного момента следует, что он не меняется, если силу переместить вдоль линии действия.

Если рассматривается плоская система сил или силы, расположенные в одной плоскости, то целесообразно ввести понятие *алгебраического момента силы*.

Модуль алгебраического момента равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах r и F . Если угол между этими векторами равен (рисунок 19), то можем записать:

$$\left|M_O\ F\right| Fr \sin\ . \tag{24}$$

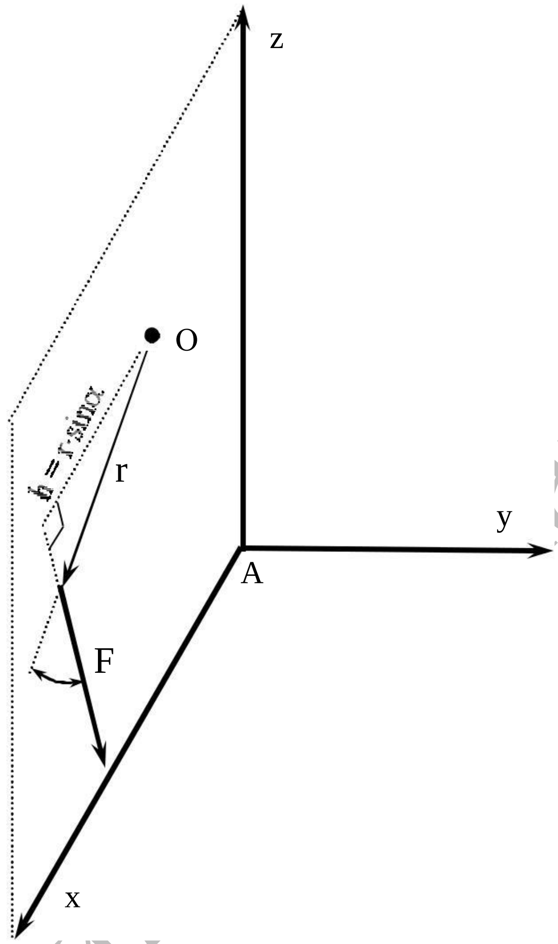


Рисунок 19 – Алгебраический момент
силы относительно точки

Произведение r sin h представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы. Величина h называется *плечом силы* относительно точки O.

Расположим в плоскости, определяемой векторами r и F , оси координат Axyz, при этом ось Ay будет расположена перпендикулярно этой плоскости. Алгебраическим моментом силы называется произведение плеча силы h на модуль силы F .

Знаком алгебраического момента будет плюс, если для наблюдателя, расположенного вдоль положительного направления оси Oy, сила F стремится повернуться вокруг точки O против часовой стрелки. В противоположном случае знак алгебраического момента будет отрицательным.

Формула определения моментов через проекции

В качестве точки О, относительно которой подсчитывается момент скользящего вектора, обычно выбирается начало координат. В этом случае момент силы будет приложен в начале координат и проекции его на оси будут соответствующими осевыми моментами.

Если задана сила F своими проекциями (F_x, F_y, F_z) и известны проекции радиус-вектора r (x_A, y_A, z_A), определяющего точку приложения силы F (или просто координаты этой точки), то момент вектора F относительно точки O определяются по формуле:

$$M_O(\vec F) = \vec r \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_{0x}\vec i + M_{0y}\vec j + M_{0z}\vec k, \qquad (25)$$

где $M_{0x} = y_A F_z - z_A F_y$, $M_{0y} = z_A F_x - x_A F_z$, $M_{0z} = x_A F_y - y_A F_x$.

Момент силы относительно оси

Для определения осевого момента силы F относительно оси Oz проведем перпендикулярную к ней плоскость П (рисунок 20). На рисунке радиус-вектор r определяет точку приложения силы F . Вектор M_O перпендикулярен плоскости, определяемой вектором силы F и радиусом-вектором r , и равен моменту силы F относительно точки О. Угол соответствует угловому расстоянию между осью Oz и вектором M_O . Отрезок A_1B_1 соответствует проекции вектора силы F на плоскость П.

Моментом силы относительно оси называется проекция момента силы относительно произвольной точки оси на ось:

$$M_{oz} = |M_O|\cos = |\vec r \times \vec F|\cos, \qquad (26а)$$

или

$$M_{oz} = 2S_{ABO}\cos = 2S_{A_1B_1O}. \qquad (26б)$$

Таким образом, *удвоенная площадь треугольника, образованного этой проекцией и точкой пересечения оси с плоскостью, определяет величину осевого момента*.

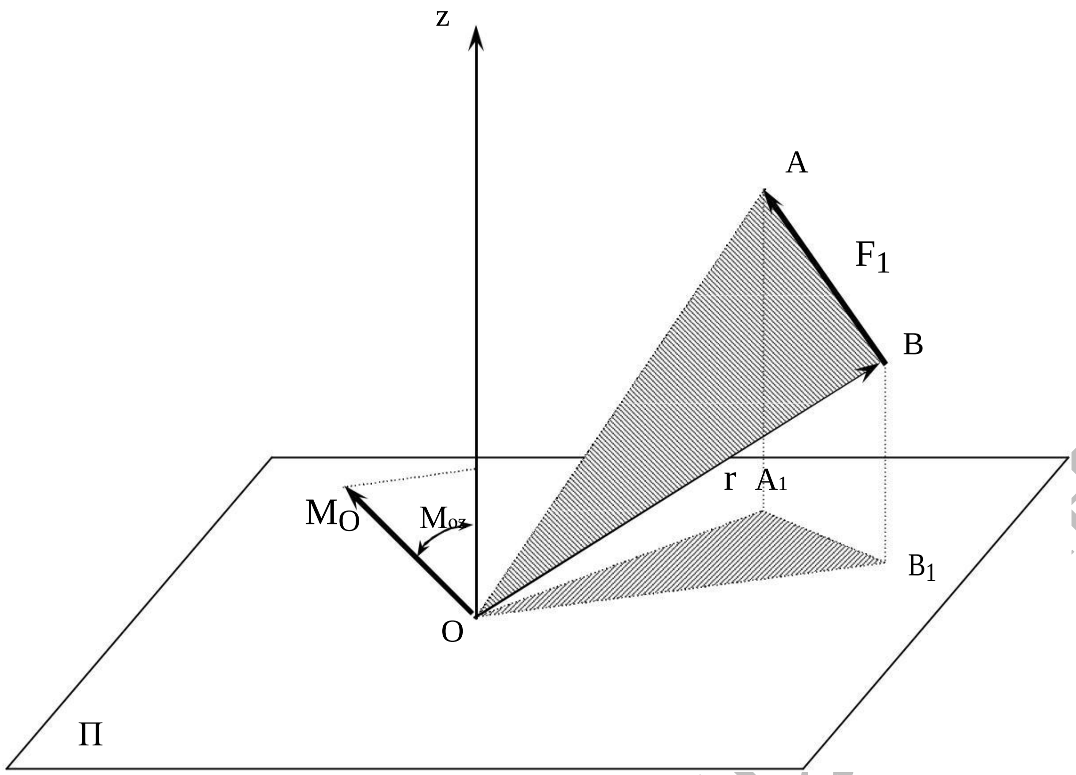


Рисунок 20 – Определение момента силы относительно оси

Знак момента будет положительным, если для наблюдателя, расположенного вдоль положительного направления оси, проекция вектора стремится повернуться вокруг точки пересечения оси с плоскостью против часовой стрелки. Если проекция стремится повернуться по часовой стрелке, то знак осевого момента будет отрицательным.

Теорема Вариньона

Если пространственная система сходящихся сил приводится к равнодействующей, то для нее справедлива теорема Вариньона, которая заключается в следующем: *момент равнодействующей пространственной системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен сумме моментов этих сил относительно той же точки.*

▲ Пусть на тело действует система сходящихся сил, равнодействующая которой определяется следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \vec{F}_n .$$

Найдем момент равнодействующей этой системы относительно некоторой произвольной точки O:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \vec{F}_n),$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... \vec{r} \times \vec{F}_3 = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{M}_O(\vec{F}_3).$$

Таким образом, получаем: $\vec{M}_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$. ▲

1.6 Плоская и пространственная системы сил

Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Линии действия трех непараллельных взаимно уравновешивающихся сил, лежащих в одной плоскости, пересекаются в одной точке.

▲ Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, A_3 приложены три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости (рисунок 21). Перенесем силы F_1 и F_2 в точку пересечения их линий действия и найдем равнодействующую R .

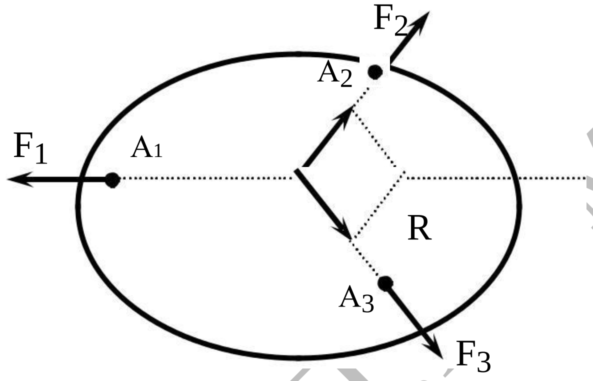


Рисунок 21 – К доказательству теоремы о равновесии трех непараллельных сил

Сила F_3 , будучи уравновешивающей системы сил F_1 и F_2 , равна по модулю R и направлена по ее линии действия в противоположную сторону.

Таким образом, линия действия силы F_3 проходит через точку, в которой пересекаются линии действия сил F_1 и F_2 , что и требовалось доказать. ▲

Теорема о параллельном переносе силы

Силу F можно переносить в любую точку пространства O, если добавить при этом пару с моментом, равным моменту силы F относительно точки O.

▲ Пусть сила F приложена в точке A (рисунок 22). Приложим в точке O уравновешенную систему сил F_O и F_O , причем $\left|F\right| \quad \left|F_0\right|$ и F , F_O – собственно параллельные силы. Очевидно, что система

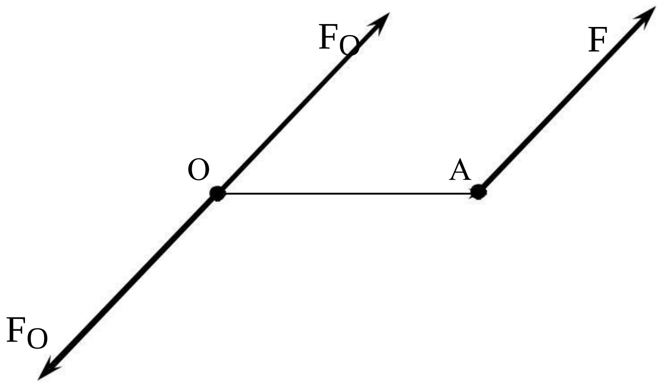


Рисунок 22 – Доказательство теоремы о параллельном переносе силы

3-х сил F, F_O и F_O эквивалентна одной силе F, но сила F и F_O образуют пару с моментом $M(F, F_0) = M_0(F)$. Таким образом, сила F_O изображается тем же вектором, что и сила F, но приложенная в другой точке пространства. ▲

Пара сил (F, F_O) называется *присоединенной парой*.

Главный вектор и главный момент

Пусть на абсолютно твердое тело действует система сил F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), приложенных к различным его точкам и как угодно расположенных в пространстве (рисунок 23). Выберем произвольную точку О, которая называется *точкой приведения*, и перенесем в нее параллельно самим себе силы F_i.

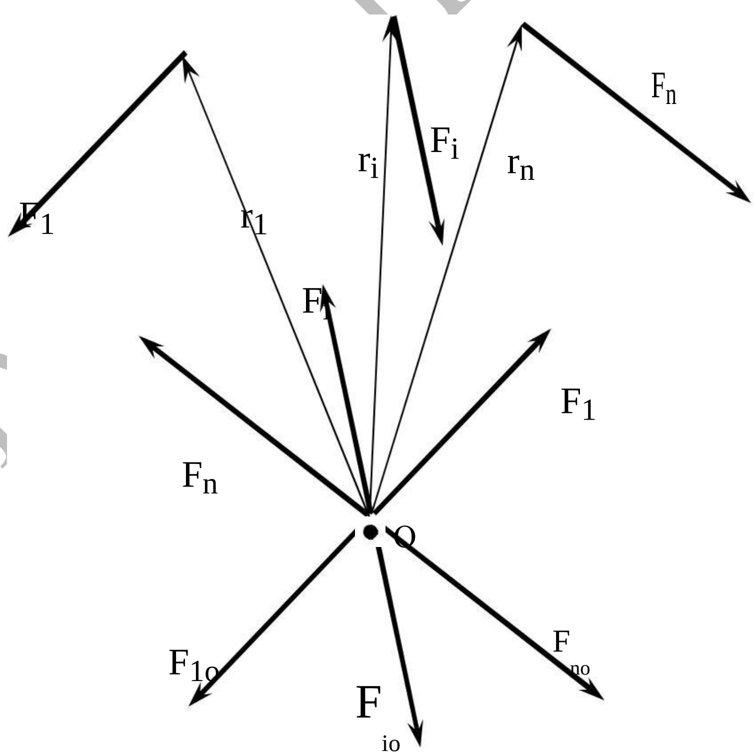


Рисунок 23 – Приведение системы сил

При этом на основании доказанной теоремы о параллельном переносе силы нужно прибавить n присоединенных пар с моментами:

$$M_i(F_i, F_i') = r_i \times F_i, \tag{27}$$

где r_i – радиус-вектор, идущий из точки приведения O к точке приложения i-ой силы.

Таким путем исходная система сил приводится к системе n сходящихся сил, приложенных в точке O, и к системе n пар сил.

Силы F_i, приложенные в точке O, можно заменить результирующей силой:

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{28}$$

Вектор R называется *главным вектором* системы сил.

<u>Главный вектор в общем случае не является равнодействующей, так как он не эквивалентен первоначальной системе сил</u>.

Систему из n пар сил можно заменить одной парой с моментом M, равным геометрической сумме моментов присоединенных пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i(F_i, F_i') = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i. \tag{29}$$

Момент M называется *главным моментом системы* относительно точки приведения O.

Итак, *система сил в общем случае приводится к одной силе – главному вектору – и к одной паре, момент которой равен главному моменту.*

Условия равновесия плоской системы сил

Условия равновесия сил F_i (i = 1, 2, …, n), произвольно расположенных на плоскости, можно выразить в виде трех уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = 0, \tag{30}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции сил на декартовы оси координат.

Эти уравнения называются *основными уравнениями равновесия плоской системы сил.* Центр моментов и начало координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Существуют две другие системы уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0, \qquad (31а)$$
$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0,$$

где $U_i = F_x, F_y, F_z$, или

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0, \qquad (31б)$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ci} = 0.$$

Следует отметить, что в системе уравнений (31б) точки A, B, C не должны находиться на одной прямой.

Условия равновесия произвольной системы сил

Шесть основных уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил, расположенные произвольно, могут быть записаны в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad (32)$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0, \qquad (33)$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ci} = 0.$$

Первые три уравнения называются *уравнениями проекций сил на оси*, а вторые три уравнения называются *уравнениями моментов сил относительно осей координат*.

При помощи выражений (25) уравнение моментов представим в виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}(y_iF_{ix} - z_iF_{iy}) = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n}(z_iF_{ix} - x_iF_{iz}) = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy} - y_iF_{ix}) = 0, \end{aligned} \qquad (34)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точки приложения силы F_i ;

F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекции этой силы на оси координат, которые могут иметь любые направления.

Существуют также и другие системы шести уравнений равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве. Однако эти системы, в отличие от (32) и (33), могут рассматриваться как уравнения равновесия только в том случае, если они удовлетворяют определенным условиям.

1.7 Трение

Трение скольжения

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей соприкосновения возникает *сила трения скольжения*.

В теоретической механике обычно рассматривается только сухое трение между поверхностями тел, то есть такое трение, когда между ними нет смазывающей жидкости. Для сухого трения надо различать:

– *трение скольжения при покое или равновесии тела;*

– *трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью*.

Законы Кулона

В 1781 г. Кулон установил основные приближенные законы для сухого трения скольжения.

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону,

противоположную направлению возможного или реального скольжения тела, под действием приложенных сил. Сила трения скольжения при покое зависит от активных сил, и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, т. е.

$$0 \quad F \quad F_{max} .$$

2. Максимальная сила трения скольжения при прочих равных не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению N (нормальная реакция), т. е.

$$F_{max} \quad N , \qquad (35)$$

где безразмерный коэффициент называется *коэффициентом трения скольжения*, и он не зависит от нормального давления.

4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физических состояний трущихся поверхностей (от величины и характера шероховатости, влажности, температуры и др.).

Угол и конус трения

Пусть твердое тело под действием активных и реактивных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, когда сила трения $F_{тр}$ достигает наибольшего значения при данном значении нормальной реакции N (рисунок 24).

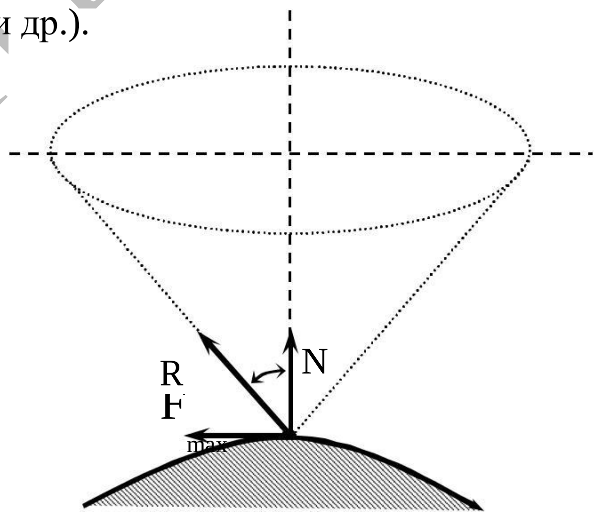


Рисунок 24 – Конус трения

Наибольший угол между полной реакцией F_{max}, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции, и направлением нормальной реакции называется *углом трения*.

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения:

$$tg \quad \frac{F_{max}}{N} , \qquad F_{max} N , \qquad tg. \qquad (36)$$

Конусом трения называют конус, описанный полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции.

Условие равновесия тела при шероховатой поверхности: для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через вершину. Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения.

Трение качения

Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения (участок BD на рисунке 25а) могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению.

Следует различать *чистое качение*, когда точка соприкосновения катка не скользит по неподвижной плоскости, и *трение со скольжением*, когда наряду с вращением катка есть и скольжение, т. е. точка катка движется по плоскости.

Приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению, заключаются в следующем.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующей качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

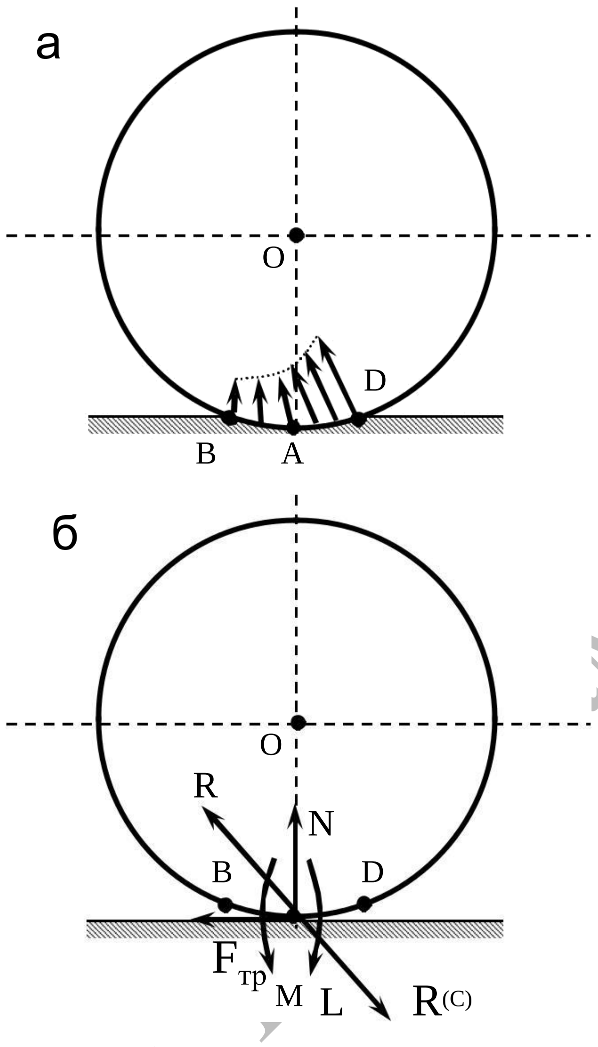
2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции N (рисунок 25б):

$$M_{max} \quad N, \qquad (37)$$

где – коэффициент трения качения.

На рисунке 25б изображены: M – момент пары сил, препятствующей вращению; L – момент пар активных сил, стремящейся катить каток; N – нормальная реакция; $F_{тр}$ – сила трения скольжения; R – главный вектор распределенных сил; $R^{(C)}$ – главный вектор активных сил.

3. Коэффициент трения качения зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей.



а – эпюра сил сопротивления;
б – силовая схема
Рисунок 25 – Трение качения

Следует помнить, что коэффициент трения качения равен длине, которую следует отложить в направлении, в котором активные силы стремятся катить каток.

Трение верчения

В случае трения верчения активные силы стремятся вращать тело (например, в форме шара) вокруг нормали к общей касательной поверхности соприкосновения. В этом случае возникает пара сил, препятствующая верчению, причем наибольший ее момент, возникающий в момент начала верчения, также прямопропорционален нормальной реакции.

Глава 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

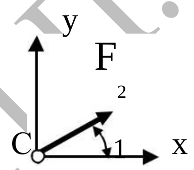
2.1 Задача С1

Условие задачи

Жесткие невесомые стержни АС и ВС закреплены между собой в точке С шарнирно, а в точках А и В закреплены шарнирно с вертикальной стеной (см. вариант рисунка С1), причем точки А, В и С лежат в одной плоскости. В точке С приложена сосредоточенная постоянная сила F_1, которая по величине равна 250 Н, а направление указано на рисунке. Кроме того, в точке С приложена сосредоточенная постоянная сила F_2, величина и направление которой указаны в таблице 1.

Определить силы реакций связи, действующие в стержнях АС и ВС.

Таблица 1 – Данные к задаче С1

Сила				
Номер условия	1			
	F_2 = 150 Н	F_2 = 100 Н	F_2 = 300 Н	F_2 = 200 Н
0	90	–	–	–
1	–	–	180	–
2	270	–	–	–
3	–	–	0	–
4	–	90	–	–
5	–	–	–	270
6	–	180	–	–
7	–	–	180	–
8	0	–	–	–
9	–	–	–	0

Комментарий к задаче

Задача С1 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с плоской системой сходящихся сил. Для решения этой задачи и проверки достоверности полученных результатов следует использовать как геометрические (метод силового многоугольника, метод построения параллелограммов), так и аналитические методы.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге вертикальную стену, стержни и указанные на рисунке координатные оси, выбрав точкой их пересечения точку С.
2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом стержни заменить действующими на них силами.
3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на координатные оси.
4. Записать уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил с учетом данных задачи.
5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения сил.
6. Проверить достоверность полученных численных значений сил, действующих в стержнях АС и ВС – отдельно на чертеже построить силовой многоугольник из векторов всех сил и удостовериться в том, что он является замкнутым.

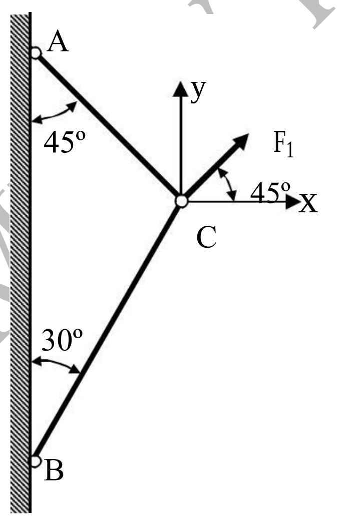


Рисунок С1 – Вариант № 0

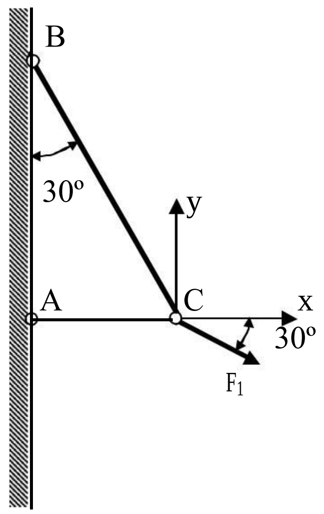


Рисунок С1 – Вариант № 1

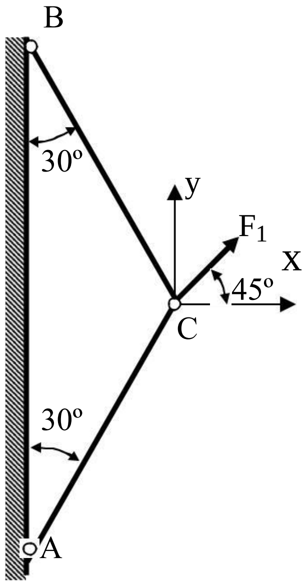


Рисунок С1 – Вариант № 2

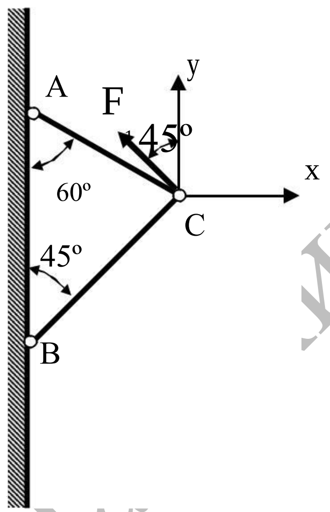


Рисунок С1 – Вариант № 3

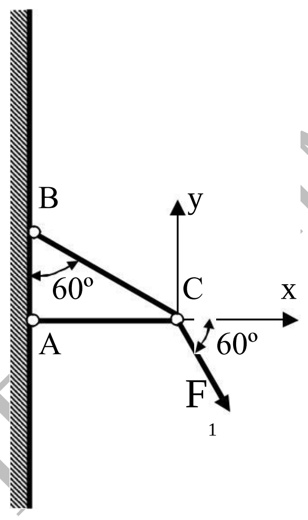


Рисунок С1 – Вариант № 4

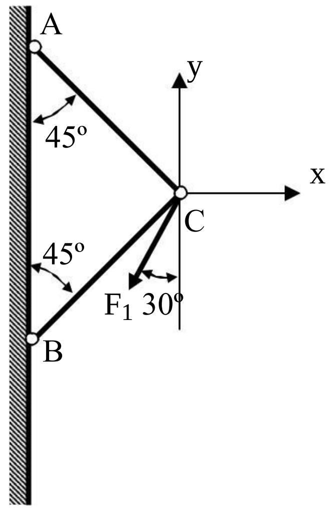


Рисунок С1 – Вариант № 5

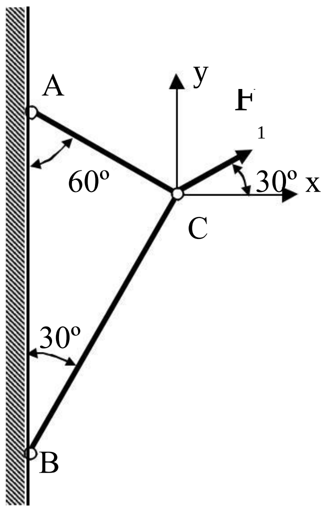


Рисунок С1 – Вариант № 6

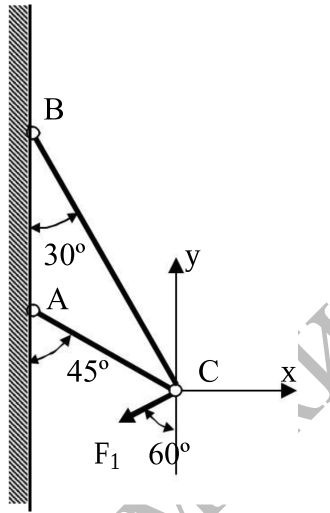


Рисунок С1 – Вариант № 7

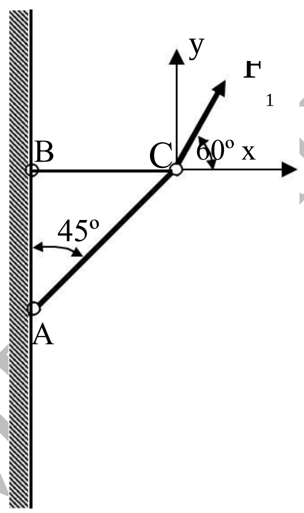


Рисунок С1 – Вариант № 8

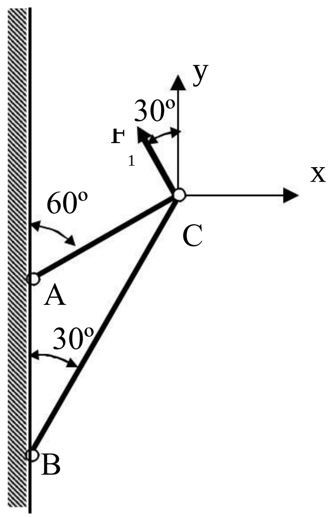


Рисунок С1 – Вариант № 9

2.2 Задача С2

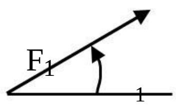
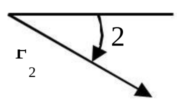
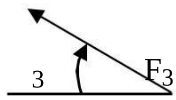
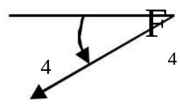
Условие задачи

На недеформируемую тонкую невесомую балку ABCDE действует пара сил с моментом M = 50 Н м и распределенная нагрузка, максимальная интенсивность которой составляет q_{max} = 50 Н/м. Кроме того, на балку действует сосредоточенная постоянная сила (величина, направление и точка приложения силы указаны в таблице 2).

Определить силы реакций связей, удерживающих балку в равновесии, через заданные величины.

При подсчетах принять AB = BC = CD = DE =1 м.

Таблица 2 – Данные к задаче С2

Сила								
	F_1 = 50 Н		F_2 = 30 Н		F_3 = 70 Н		F_4 = 40 Н	
Номер условия	Точка приложения	1	Точка приложения	2	Точка приложения	3	Точка приложения	4
0	C	30	–	–	–	–	–	–
1	–	–	B	45	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	D	30
3	–	–	E	60	–	–	–	–
4	D	60	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–	–	C	45	–	–
6	–	–	–	–	–	–	C	30
7	–	–	–	–	E	30	–	–
8	D	30	–	–	–	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	E	60

Комментарий к задаче

Задача С2 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с произвольной плоской системой сил, действующей на материальное тело. В задаче необходимо определить значения удерживающих балку в равновесии реакций связей в случае, когда на нее действуют лежащие в одной плоскости силы и крутящий момент. В задаче используются следующие типы связей и их комбинации: неподвижный цилиндрический шарнир + подвижный цилиндрический шарнир; неподвижный цилиндрический шарнир + невесомый нерастяжимый стержень, закрепленный на неподвижном цилиндрическом шарнире; консольное закрепление балки.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге балку и выбрать систему отсчета, указав на чертеже координатные оси.

2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом заменив связи их реакциями.

3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на выбранные координатные оси.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сил с учетом действующих на балку сил.

5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения реакций связей.

6. Составив и решив дополнительное уравнение моментов, провести проверку полученного решения.

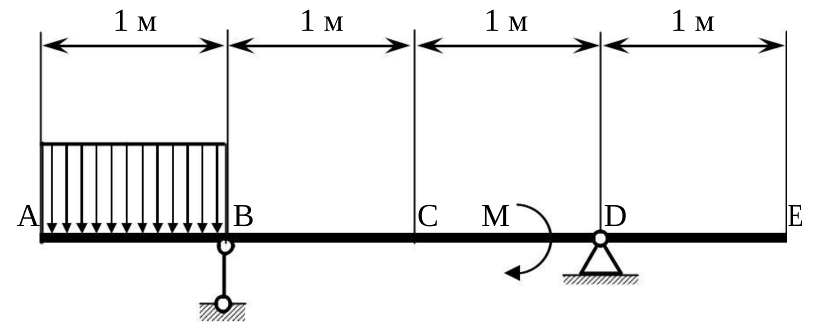


Рисунок С2 – Вариант № 0

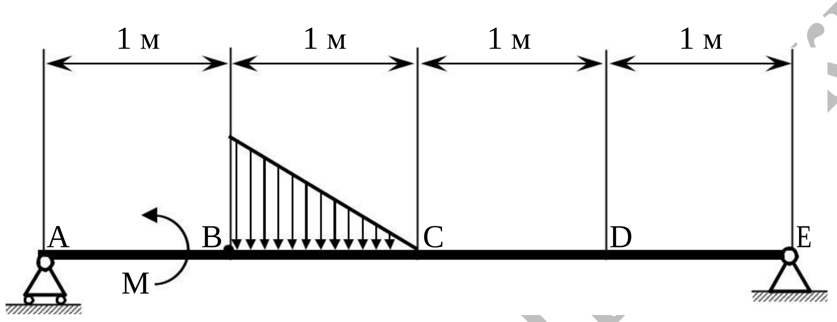


Рисунок С2 – Вариант № 1

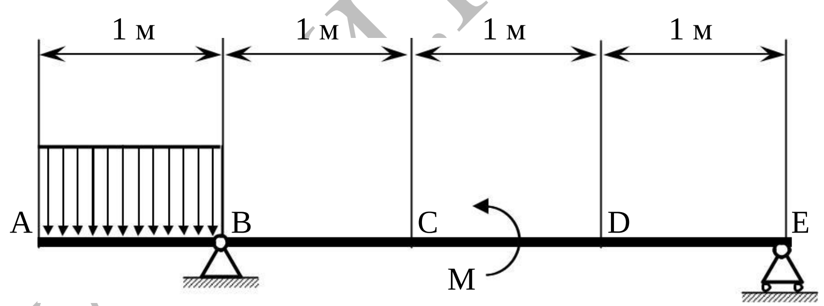


Рисунок С2 – Вариант № 2

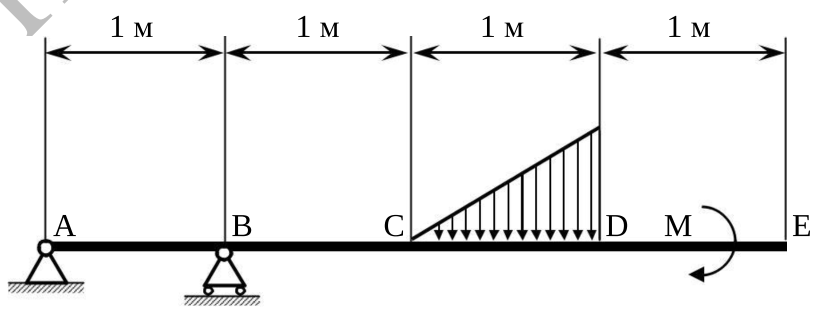


Рисунок С2 – Вариант № 3

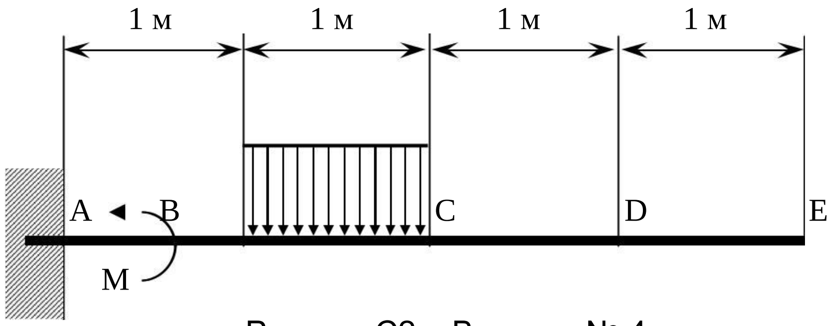


Рисунок С2 – Вариант № 4

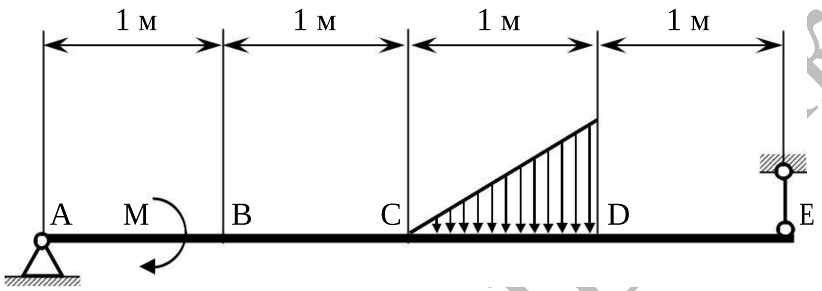


Рисунок С2 – Вариант № 5

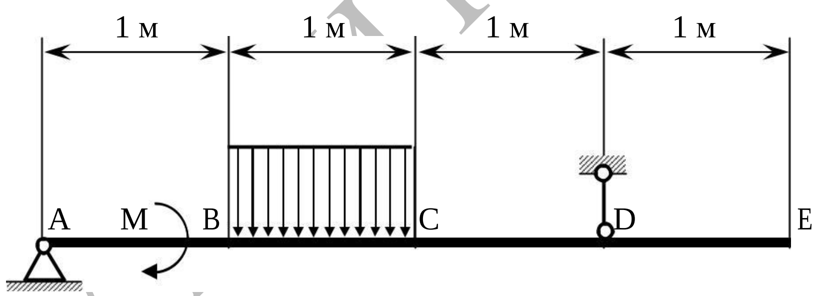


Рисунок С2 – Вариант № 6

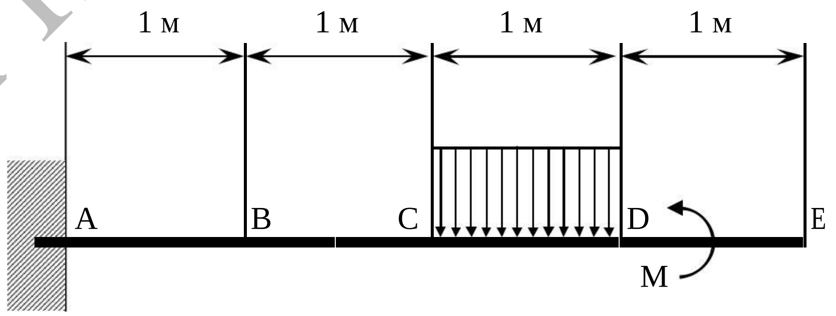


Рисунок С2 – Вариант № 7

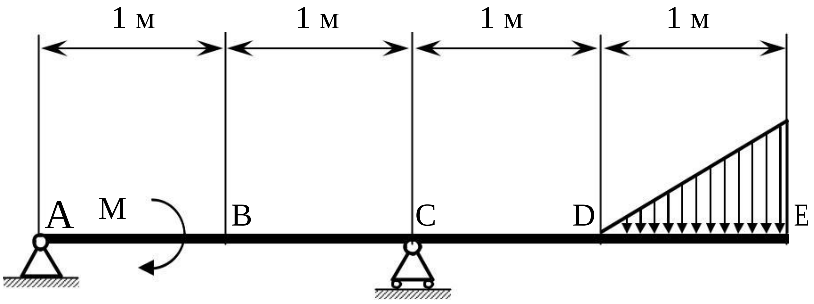


Рисунок С2 – Вариант № 8

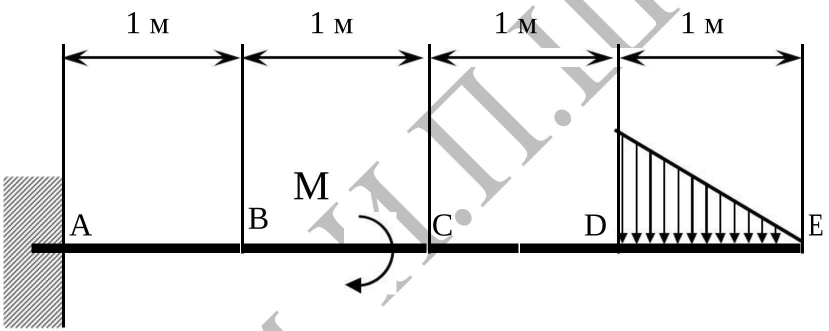


Рисунок С2 – Вариант № 9

2.3 Задача С3

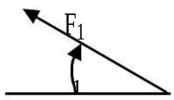
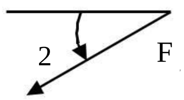
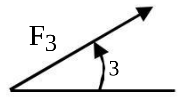
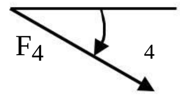
Условие задачи

Жесткая невесомая рама ABCDEKL закреплена так, как это указано на рисунке С3. При подсчетах принять AB = BC = CD = DE = EK = KL = 1 м.

На раму действует распределенная нагрузка максимальной интенсивности q_{max} = 50 Н/м, а также постоянная сила F (F = 100 Н). На раму действует сосредоточенная сила (величина, направление и точки приложения силы указаны в таблице 3).

Определить через заданные величины реакции связей, действующих на раму.

Таблица 3 – Данные к задаче С 3

Сила								
Номер условия	F_1 = 50 Н		F_2 = 30 Н		F_3 = 70 Н		F_4 = 40 Н	
	Точка приложения	1	Точка приложения	2	Точка приложения	3	Точка приложения	4
0	–	–	C	30	–	–	–	–
1	–	–	–	–	B	45	–	–
2	D	30	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	E	60	–	–
4	–	–	D	60	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–	–	C	45
6	–	–	–	–	–	–	C	30
7	–	–	–	–	–	–	E	30
8	–	–	D	30	–	–	–	–
9	E	60	–	–	–	–	–	–

Комментарий к задаче

Задача С3 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков работы с произвольной плоской системой сил, действующей на материальное тело. В задаче необходимо определить значения удерживающих раму в равновесии реакций связей в случае, когда на нее действуют лежащие в одной плоскости силы и крутящий момент. В задаче используются следующие типы связей и их комбинации: неподвижный цилиндрический шарнир + подвижный цилиндрический шарнир; неподвижный цилиндрический шарнир + невесомый нерастяжимый стержень, закрепленный на неподвижном цилиндрическом шарнире; консольное закрепление балки.

План решения задачи

1. Вычертить на миллиметровой бумаге раму и выбрать систему отсчета, указав на чертеже координатные оси.

2. Изобразить на чертеже все действующие на балку силы, при этом заменив связи их реакциями.

3. Спроецировать вектора активных и реактивных сил на выбранные координатные оси.

4. Записать уравнения равновесия плоской системы сил с учетом действующих на балку сил.

5. Из полученной системы уравнений равновесия определить неизвестные значения реакций связей.

6. Выполнить проверку полученного решения, составив и решив дополнительное уравнение моментов.

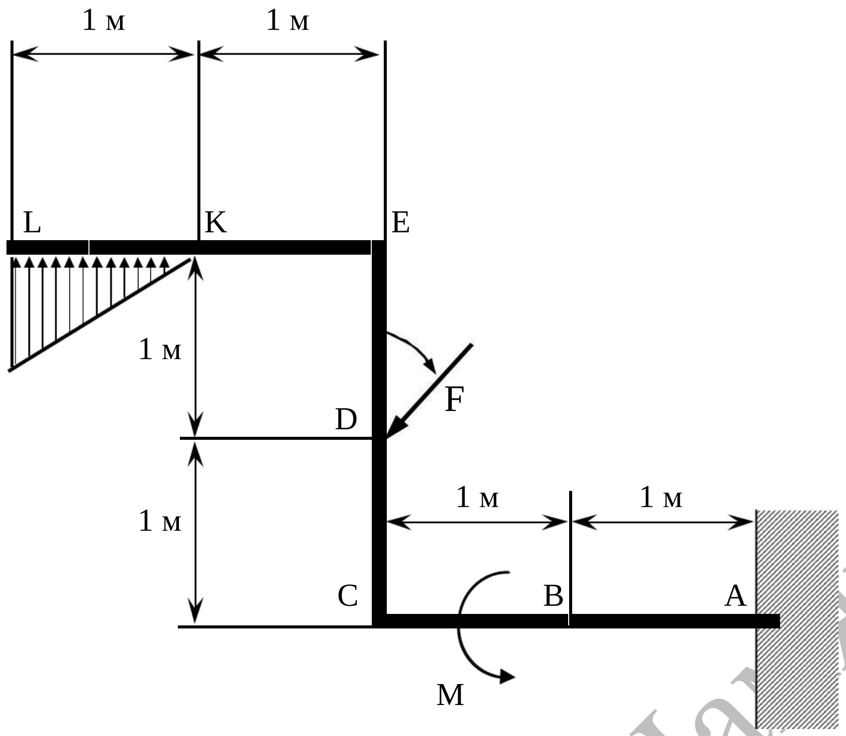


Рисунок С3 – Вариант № 0

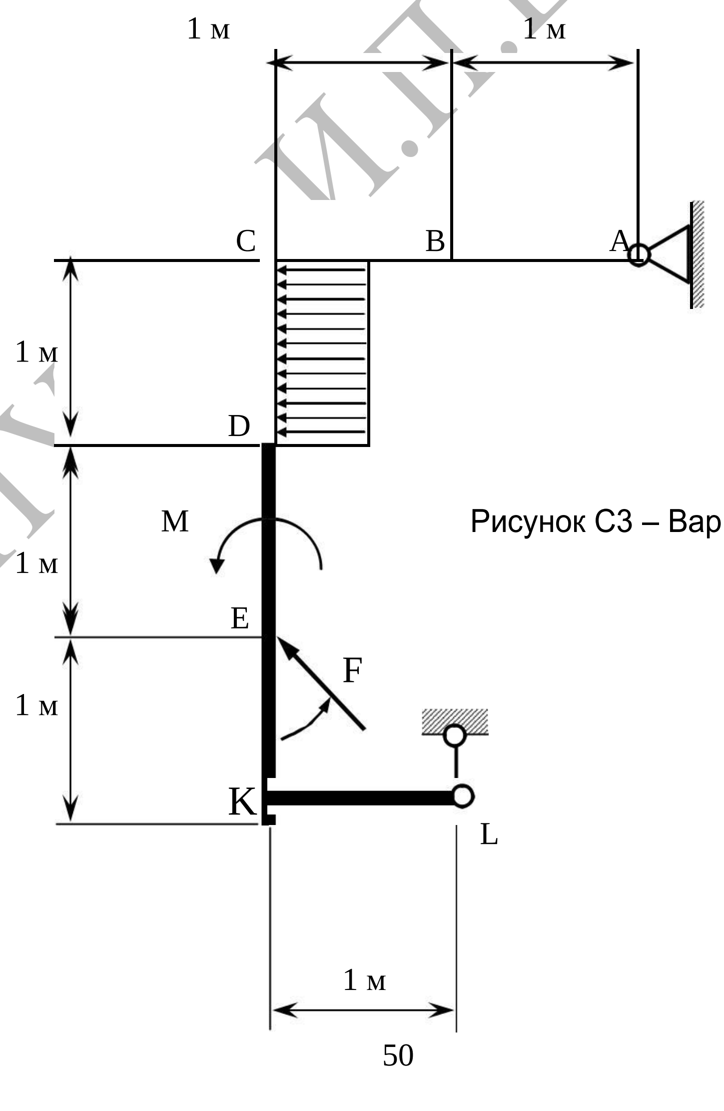


Рисунок С3 – Вариант № 1

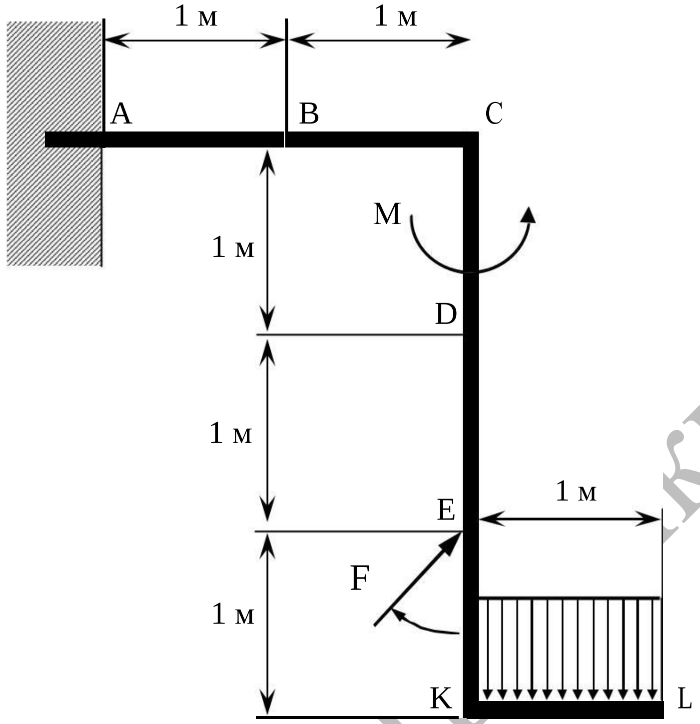


Рисунок С3 – Вариант № 2

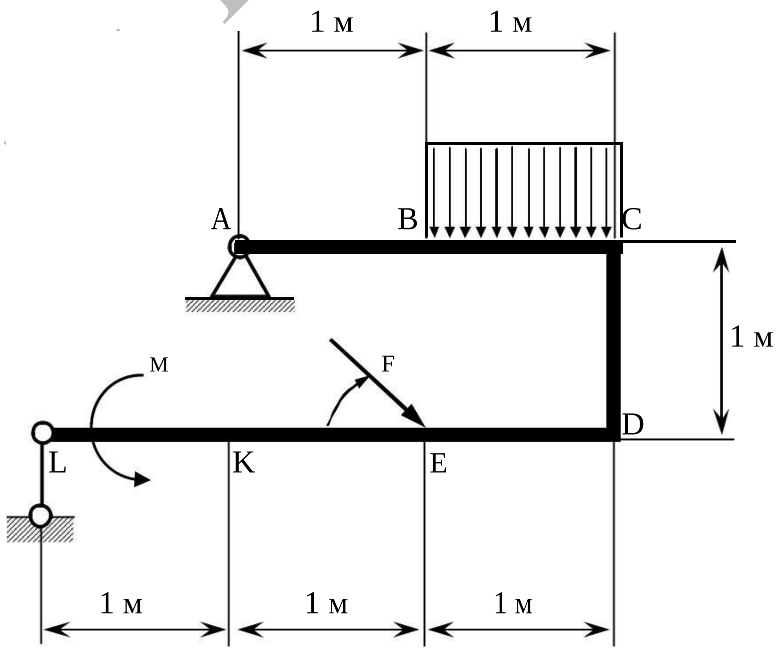


Рисунок С3 – Вариант № 3

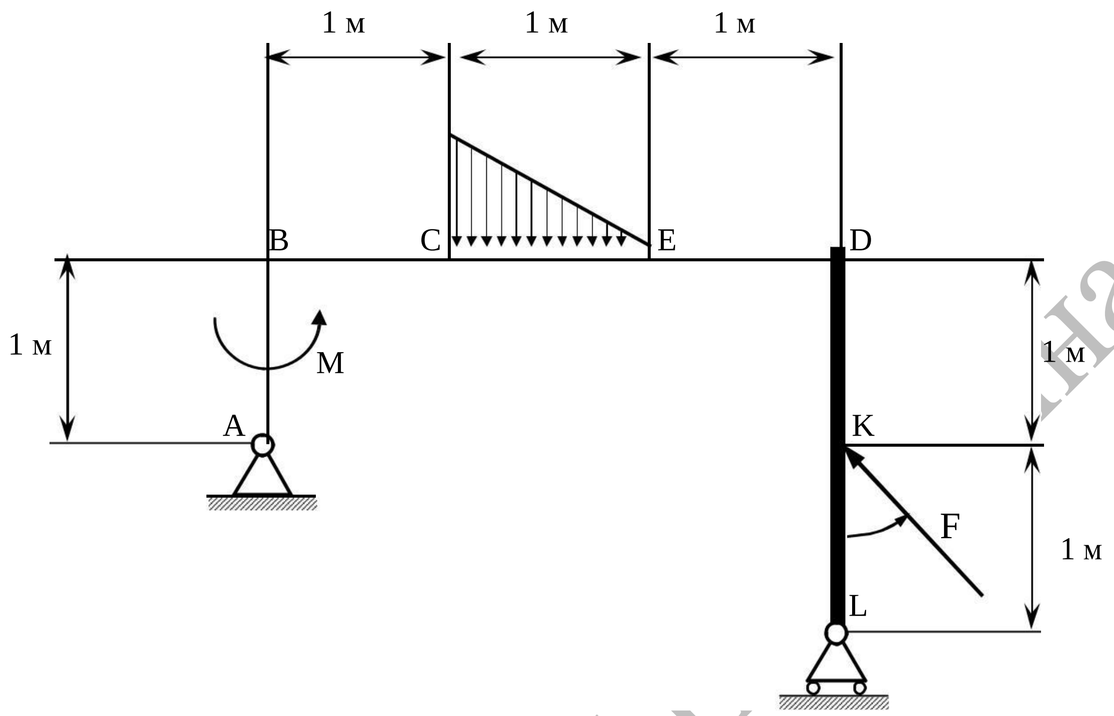


Рисунок С3 – Вариант № 4

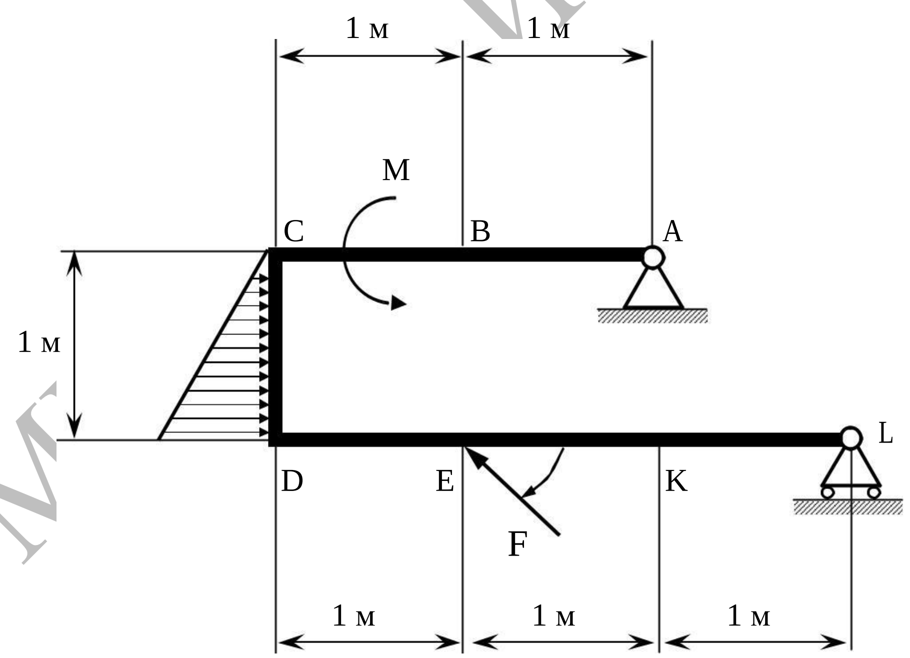


Рисунок С3 – Вариант № 5

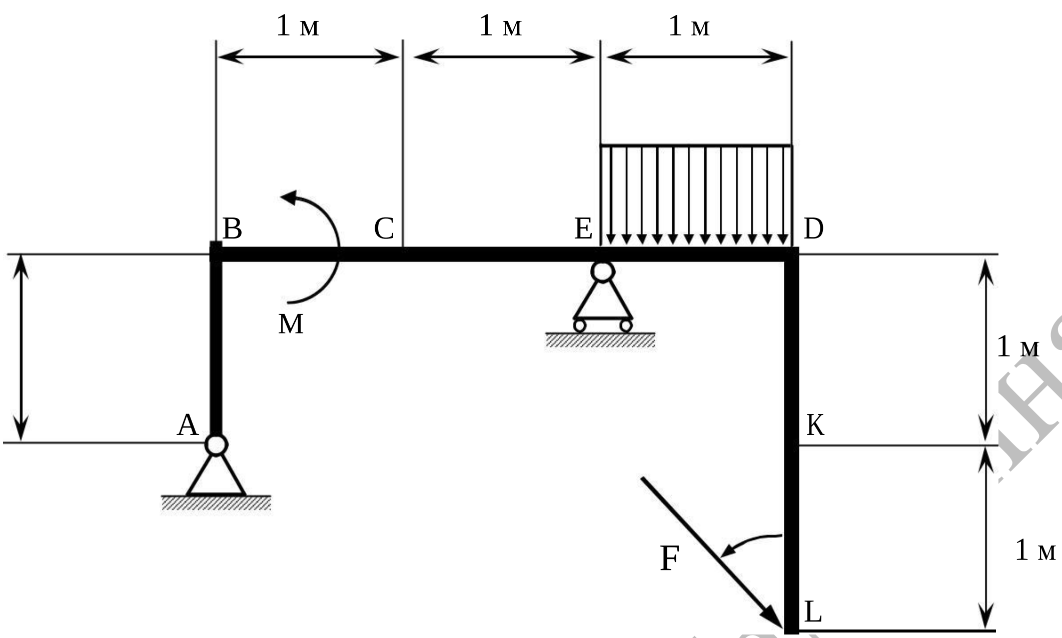


Рисунок С3 – Вариант № 6

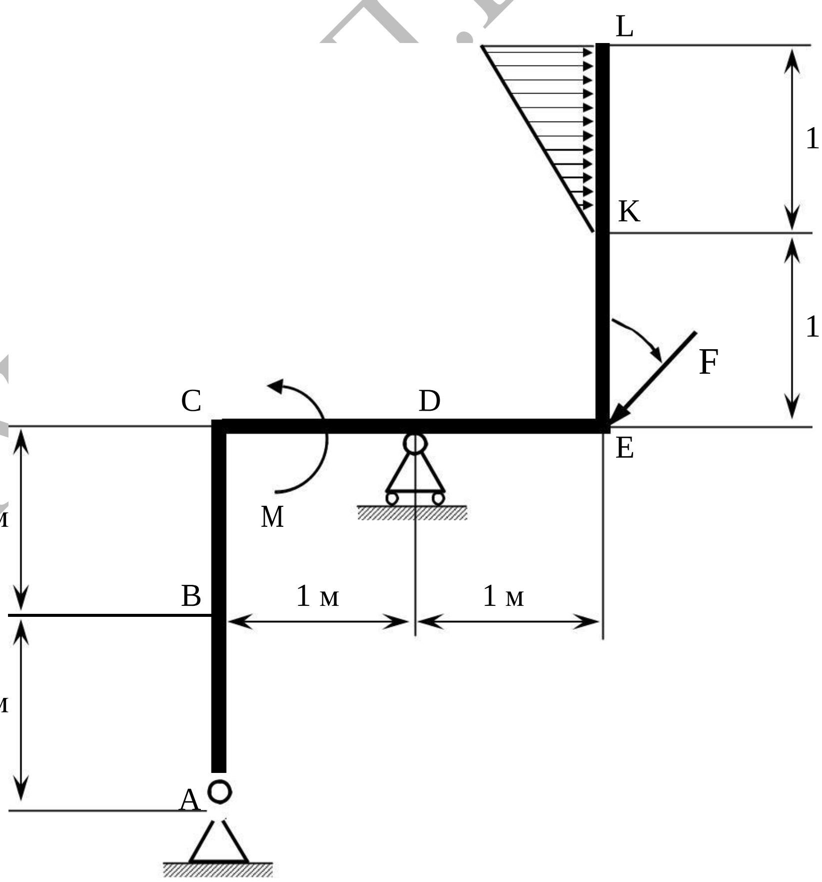


Рисунок С3 – Вариант № 7

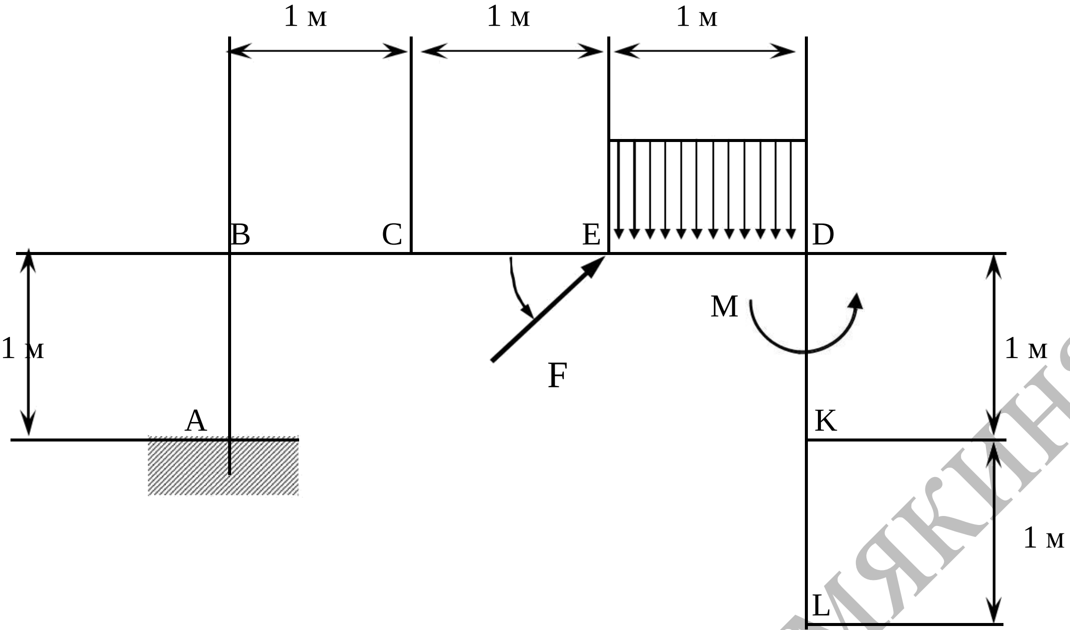


Рисунок С3 – Вариант № 8

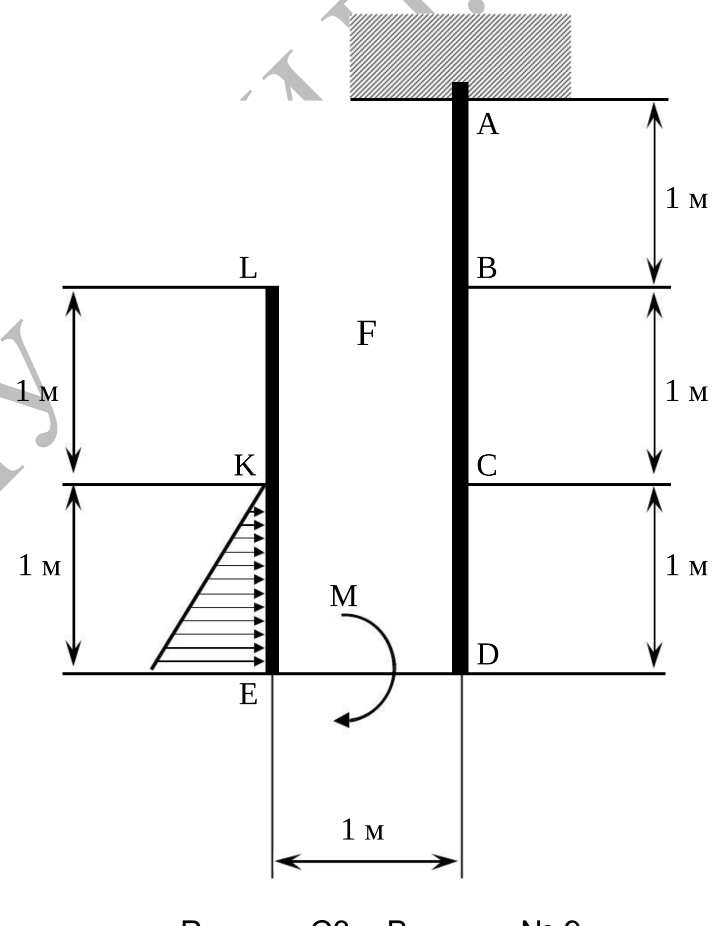


Рисунок С3 – Вариант № 9

2.4 Задача С4

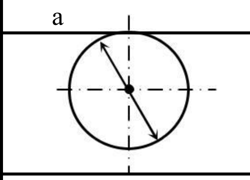
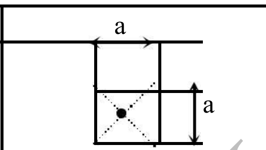
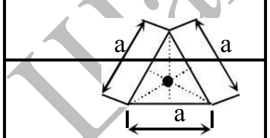
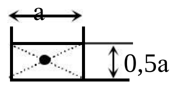
Условие задачи

Однородная тонкая пластина имеет форму, представленную на рисунке С4. В пластине вырезано два отверстия. Форма и расположение первого отверстия указаны на рисунке С4. Форма и расположение второго отверстия указаны в таблице 4.

Определить координаты центра тяжести пластины (в ответе указать координаты как по оси абсцисс, так и по оси ординат).

При решении задачи учесть, что а = 1 м.

Таблица 4 – Данные к задаче С 4

Сила				
Номер условия	Центр отверстия	Центр отверстия	Центр отверстия	Центр отверстия
0	A	–	–	–
1	–	–	C	–
2	B	–	–	–
3	–	–	–	D
4	–	A	–	–
5	–	–	D	–
6	–	–	–	C
7	B	–	–	–
8	–	D	–	–
9	–	–	–	A

Комментарий к задаче

Задача С4 предназначена для закрепления знаний, умений и навыков расчета системы параллельных сил и нахождения центра тяжести плоской фигуры. В этой задаче необходимо найти координаты центра тяжести плоской фигуры, а, следовательно, при решении задачи необходимо составлять два уравнения – отдельно для нахождения координаты по оси абсцисс и отдельно по оси ординат.

Условие задачи С4 может быть упрощено путем исключения заданного на рисунке отверстия, ограничившись включением в условие задачи отверстия из таблицы 4. Кроме того, задача может быть еще более упрощена за счет нахождения лишь одной координаты центра тяжести пластины

План решения задачи

1. Вычертить в подходящем масштабе на миллиметровой бумаге заданную пластину и нанести на нее в соответствии с условием задачи отверстия.

2. Составить систему из двух уравнений для нахождения координат центра тяжести пластины и выразить искомые координаты центра тяжести фигуры по осям абсцисс и ординат.

3. Составить проверочные уравнения и, подставив в них численные данные, подтвердить достоверность полученного решения.

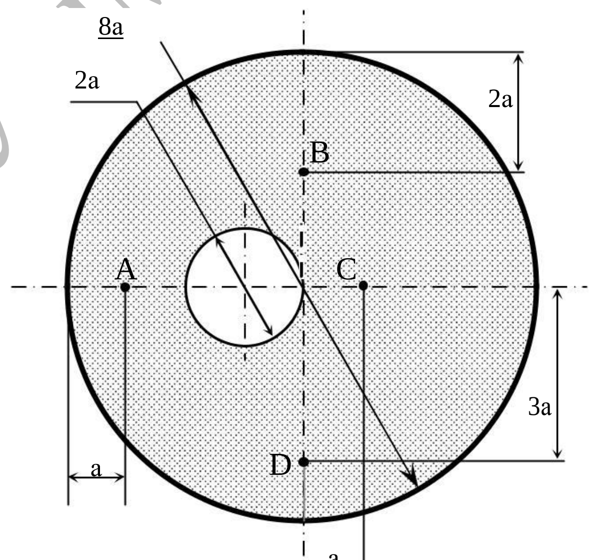


Рисунок С4 – Вариант № 0

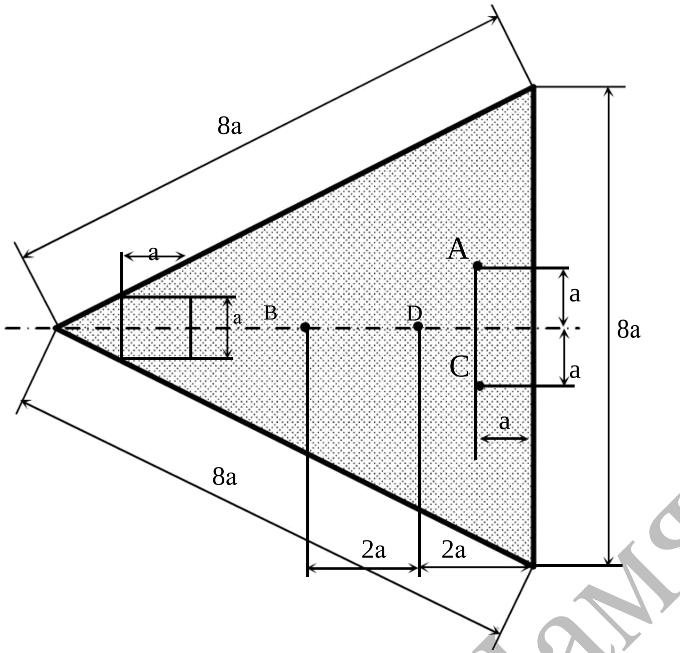


Рисунок С4 – Вариант № 1

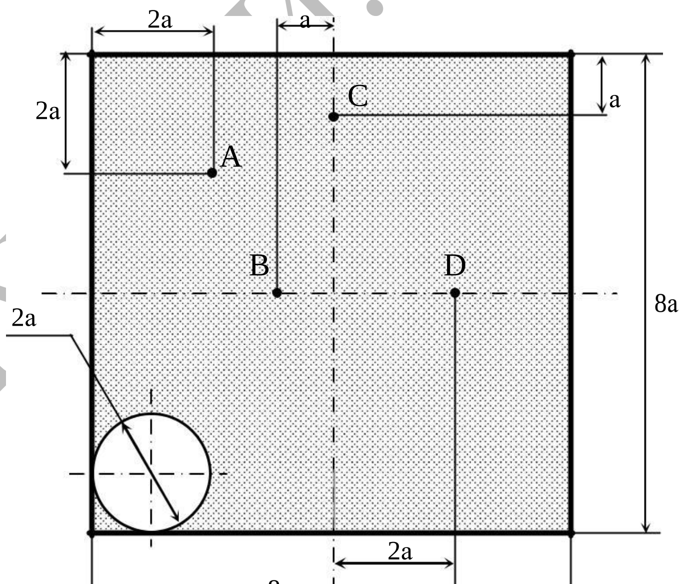


Рисунок С4 – Вариант № 2

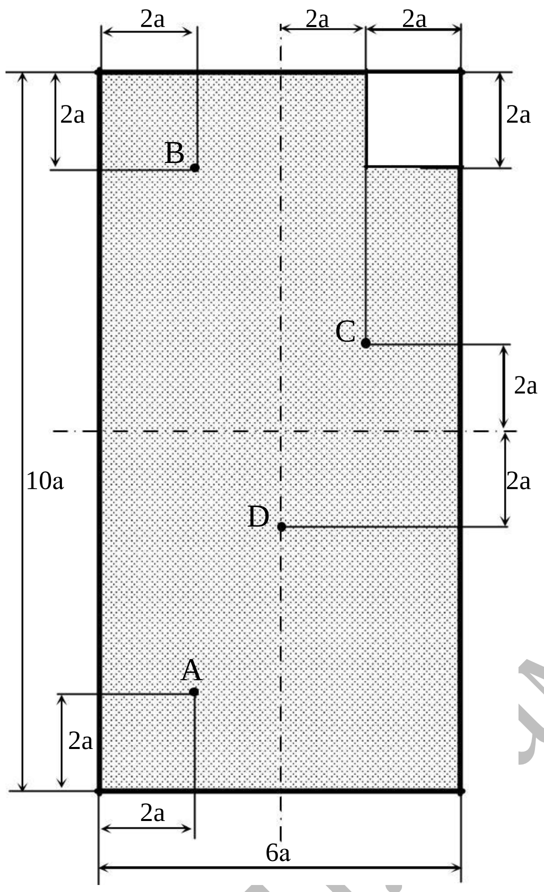


Рисунок С4 – Вариант № 3

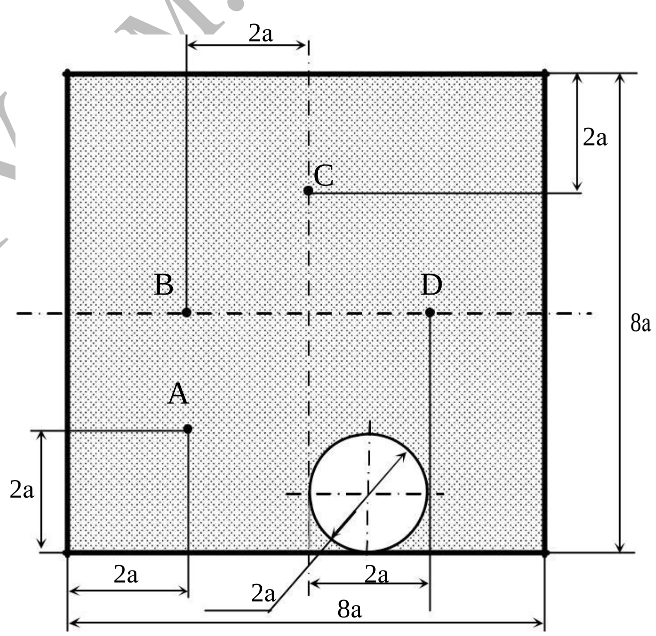


Рисунок С4 – Вариант № 4

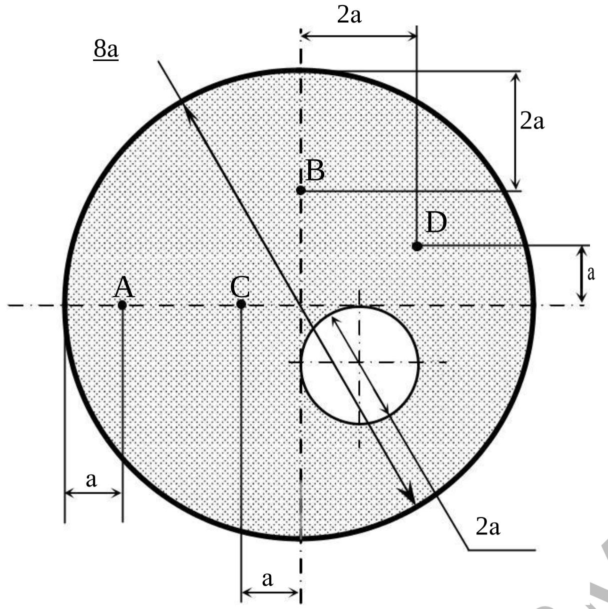


Рисунок С4 – Вариант № 5

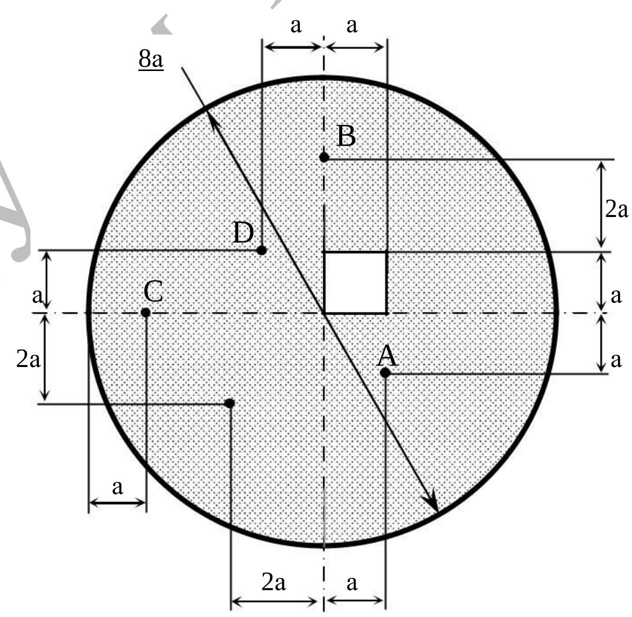


Рисунок С4 – Вариант № 6

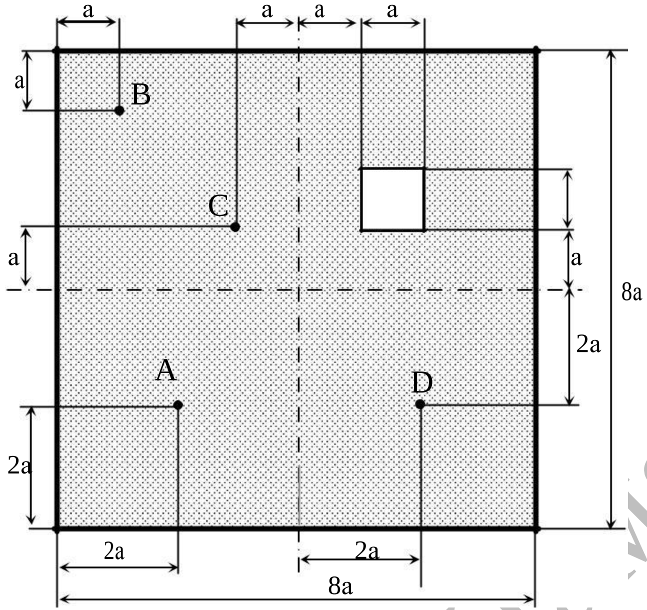


Рисунок С4 – Вариант № 7

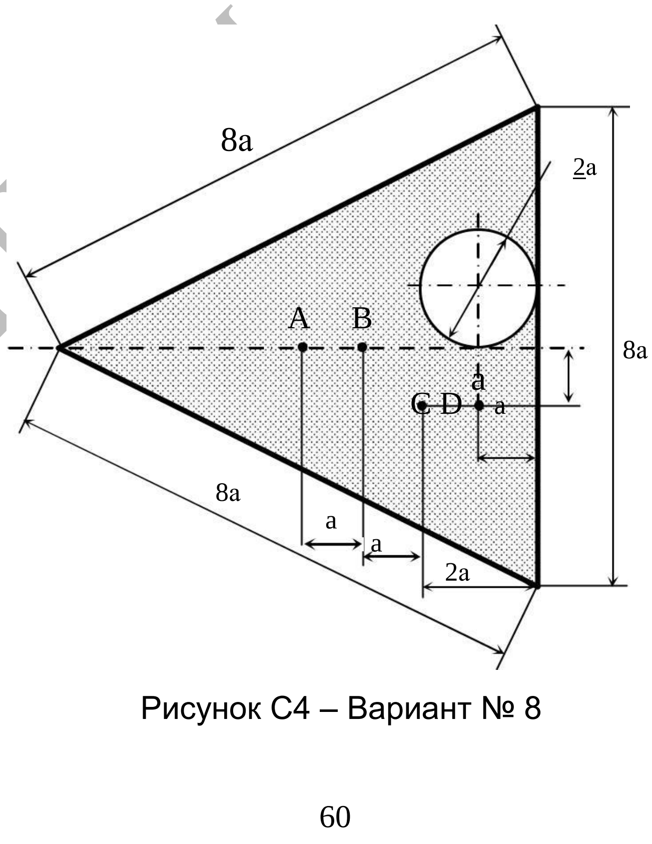


Рисунок С4 – Вариант № 8

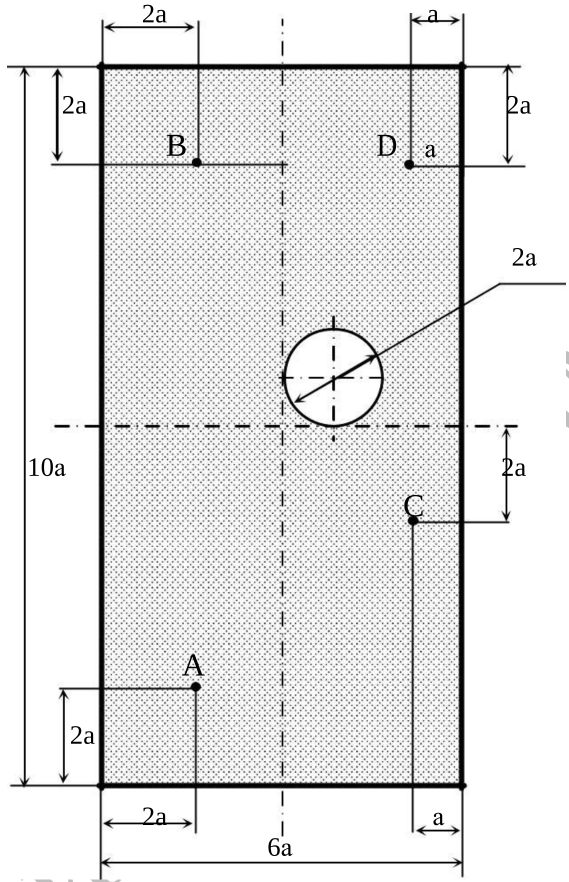


Рисунок С4 – Вариант № 9

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский, Н. Е Теоретическая механика / Н. Е. Жуковский. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 811 с.

2. Голубева, О. В. Теоретическая механика / О. В. Голубева. – М. : Высш. шк., 1968. – 487 с.

3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1974. – 478 с.

4. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1977. – Ч. 1. – 368 с.

5. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

6. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1984. – Т. 1. – 504 с.

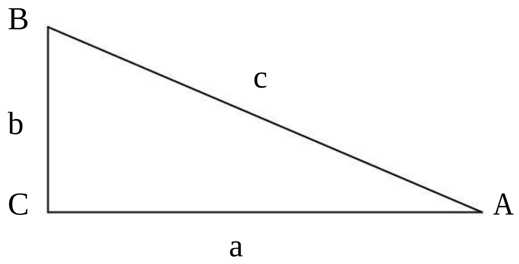
7. Осадчий, В. А. Руководство к решению задач по теоретической механике / В. А. Осадчий, А. М. Файн. – М. : Высш. шк., 1966. – 307 с.

8. Сборник задач по теоретической механике / В. Л. Канн [и др.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 480 с.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Ускорение силы тяжести g = 9,81 м/с^2.

2. Тригонометрические функции угла.



$\sin A \quad \frac{b}{c}$; $\quad \cos A \quad \frac{a}{c}$; $\quad \mathrm{tg}\, A \frac{b}{a}$; $\quad \mathrm{ctg}\, A \quad \frac{a}{b}$.

3. Тригонометрические функции важнейших углов.

Угол, град	Косинус	Синус	Тангенс
0	1	0	0
30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90	0	1	

4. Основные формулы тригонометрии.

$$\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1, \qquad \sin 2 \quad 2\sin \cos, \qquad \cos 2 \quad \cos^2 \quad \sin^2,$$

$$\mathrm{tg} \quad \frac{\sin}{\cos}, \quad \mathrm{ctg} \quad \frac{\cos}{\sin}, \quad \mathrm{tg}\ \mathrm{ctg} \quad 1,$$

$$\frac{1}{\cos^2} \quad 1 \ \mathrm{tg}^2, \qquad \frac{1}{\sin^2} \, 1 \ \mathrm{ctg}^2,$$

$$\mathrm{tg}2 \, \frac{2\mathrm{tg}}{1 - \mathrm{tg}^2}.$$

Учебное издание

Навныко Валерий Николаевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

Пособие

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Технический редактор Е. В. Лис
Корректор Л. Н. Боженко Компьютерная
вёрстка Е. Л. Щека

Подписано в печать 05.04.2010. Формат 60 x 90 1/16. Бумага Xerox.
Гарнитура Times New Roman. Ризография. Усл. печ. л. 4,0.
Тираж 138 экз. Заказ 34.

Издатель и полиграфическое исполнение
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический
университет имени И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г. 247760,
Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (02351) 2-46-29