



**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ
И МАШИН**

Методические указания
к практическим работам

ISBN 978-985-477-426-8



9 789854 774268

Мозырь
2010

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

Кафедра основ машиностроения
и методики преподавания машиностроительных дисциплин

С. Н. КОЛДАЕВА, Г. В. БОБР

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Методические указания к
практическим работам

УДК 621.01
ББК 34.41
Т 33

Мозырь
2010

Авторы-составители: Колдаева С. Н., Бобр Г. В.

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент,
декан строительного факультета УО «БелГУТ»

Д. И. Бочкарев.

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры физики УО «БелГУТ»
А. П. Павленко.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
учреждения образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»

Теория механизмов и машин : метод. указания к практ. работам
Т 33 / авт.-сост.: С. Н. Колдаева, Г. В. Бобр. – Мозырь : УО МГПУ им. И. П.
Шамякина, 2010. – 128 с.
ISBN 978-985-477-426-8.

Приведены основные теоретические сведения, подобраны задачи по курсу «Теория механизмов и машин», даны рекомендации для их самостоятельного решения.

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой по курсу «Теория механизмов и машин». Рекомендуются студентам машиностроительных и технологических специальностей вузов.

УДК 621.01
ББК 34.41

ISBN 978-985-477-426-8

□ Авт.-сост.: Колдаева С. Н.,
Бобр Г. В., 2010.

□ УО МГПУ им. И. П.
Шамякина, 2010

Учебное издание

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Методические указания к
практическим работам

Авторы-составители:
Колдаева Светлана Николаевна
Бобр Галина Викторовна

Ответственный за выпуск С. С. Борисова
Технический редактор Н. В. Жогло
Оригинал-макет Е. Л. Щека
Корректор Л. Н. Боженко

Подписано в печать 10.11.2010. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Ризография. Усл. печ. л. 8.
Тираж 104 экз. Заказ 93.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина»
ЛИ № 02330/0549479 от 14 мая 2009 г.
247760, Мозырь, Гомельская обл., ул. Студенческая, 28
Тел. (02351) 2-46-29

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
<i>Практическая работа № 1.</i>	
Структурный анализ механизмов	5
<i>Практическая работа № 2.</i>	
Кинематический анализ механизмов.....	18
<i>Практическая работа № 3.</i>	
Кулачковые механизмы. Анализ и синтез	35
<i>Практическая работа № 4.</i>	
Геометрия и кинематика зубчатых механизмов	40
<i>Практическая работа № 5.</i>	
Трение в механизмах.....	62
<i>Практическая работа № 6.</i>	
Силовой расчет механизмов.....	81
<i>Практическая работа № 7.</i>	
Регулирование движения машины.....	99
<i>Практическая работа № 8.</i>	
Уравновешивание масс	115
Список рекомендуемой и использованной литературы.....	127

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов есть наука, изучающая методы построения и исследования механизмов и машин.

Перед теорией механизмов стоят две задачи. Первая задача, называемая анализом механизмов, заключается в том, чтобы изучить методы исследования существующих механизмов. К кинематическому анализу механизмов, например, относятся определение траекторий, скоростей и ускорений различных точек звеньев всевозможных механизмов.

Вторая задача, называемая синтезом механизмов, является задачей, обратной анализу, т. е. при синтезе требуется спроектировать механизм по заданным структурным, кинематическим или динамическим условиям.

Теория механизмов и машин – первая инженерная дисциплина, преподаваемая студентам в вузе, она является основной для изучения специальных дисциплин, таких, как «Детали машин», «Технология машиностроения» и др.

Данные методические указания составлены в соответствии с программами изучения специальных дисциплин для студентов инженерно-педагогического факультета. В каждой практической работе приведены примеры решения задач, а так же задания для самостоятельного решения.

Практическая работа № 1.
СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Механизм. Основные понятия и определения

Простейшим объектом исследования теории механизмов и машин является *механизм*.

Механизм – это система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в *требуемые движения* других твердых тел.

Под *требуемым движением* следует понимать, в первую очередь, воспроизведение определенной траектории. Очень часто движение по этой траектории необходимо осуществить по заданному закону.

Каждый механизм имеет определенное строение (структуру).

Структура механизма – это взаимное расположение его составных частей.

Любой механизм состоит из звеньев и кинематических пар. Введение этих понятий связано с изучением движения механизма.

Звено – одно или несколько неподвижно соединенных твердых тел, входящих в состав механизма. Из определения следует, что звено от звена отличается относительным движением.

Звенья образуют между собой подвижные соединения. Каждое звено может соединяться подвижно с несколькими звеньями, но отдельно выделяют каждое подвижное соединение двух звеньев.

Кинематическая пара – это подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев.

Существуют классификации кинематических пар по различным признакам.

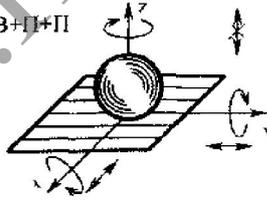
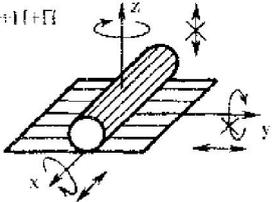
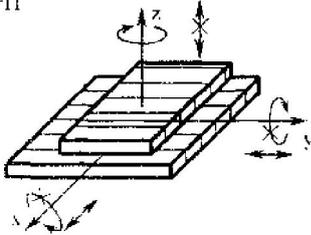
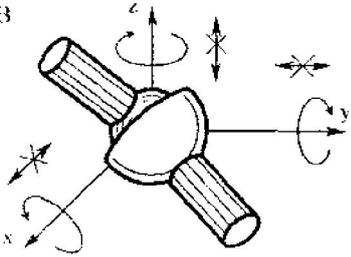
Основной является *классификация кинематических пар по числу условий связи*, накладываемых на относительное движение звеньев (*метод Артоболевского*). Свободное тело в пространстве обладает шестью степенями свободы, т. е. шестью простейшими (три вращательными и тремя поступательными) независимыми движениями.

Кинематическая пара допускает от одной до пяти степеней свободы в относительном движении двух звеньев $1 < W < 5$ в силу того, что контактируемые звенья ограничивают взаимное положение и движение, т. е. кинематическая пара проявляет себя как связь. Каждое условие связи уменьшает на единицу число степеней свободы каждого звена в их относительном движении. Если число условий связи кинематической пары обозначить S , то $1 < S < 5$. При $S = 0$ контакт между звеньями отсутствует, и они не образуют кинематической пары. При $S = 6$ два соприкасающихся тела соединены жестко и образуют одно звено

Число условий связи определяет класс кинематической пары. Все кинематические пары разбиты на пять классов: I, II, III, IV, V.

В таблице 1.1 показаны наиболее распространенные кинематические пары с их условными обозначениями по ГОСТ 2 770 – 68, дополненными обозначениями, которые рекомендованы Международной организацией по стандартам (ИСО). В таблице также показаны простейшие независимые движения, обеспечиваемые кинематической парой. В таблице 1.1 приведена винтовая кинематическая пара, допускающая два простейших относительных движения – вращательное (В) и поступательное (П). Однако она является кинематической парой V класса, так как поступательное и вращательное движения зависимы. Угол поворота φ и смещение H вдоль оси x связаны зависимостью $H = k\varphi$, где k – постоянная, определяемая наклоном винтовой линии.

Таблица 1.1 – Условные изображения и наименования кинематических пар

Класс кинематической пары	Число степеней свободы	Число связей	Название	Рисунок и число простейших движений	Условные обозначения
1	2	3	4	5	6
I	5	1	Шар-плоскость	$V+V+V+П+П$ 	
II	4	2	Цилиндр-плоскость	$V+V+П+П$ 	
III	3	3	Плоскостная	$V+П+П$ 	
III	3	3	Сферическая	$V+V+V$ 	

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6
IV	2	4	Цилиндрическая		
IV	2	4	Сферическая с пальцем		
	1	5	Поступательная		
V	1	5	Вращательная		
V	1	5	Винтовая		

Кинематические пары классифицируют по характеру соприкосновения звеньев. При этом различают *высшие* и *низшие* кинематические пары. В высшей кинематической паре требуемое относительное движение звеньев может быть получено только их соприкосанием по линиям и в точках. В низших кинематических парах требуемое относительное движение звеньев обеспечивается их соприкосанием либо по поверхностям, либо по таким линиям и в таких точках, которые принадлежат поверхностям и с помощью которых можно обеспечить требуемое движение.

Существует классификация кинематических пар *по характеру их замыкания*. Различают кинематические пары с *геометрическим* и *силовым* замыканиями. При геометрическом замыкании все связи в кинематической паре двухсторонние и поэтому не могут быть нарушены за счет внешних сил. При силовом замыкании кинематическая пара содержит односторонние связи. Необходимый контакт звеньев при этом обеспечивается определенными силами (сила веса, сила замыкающей пружины и т. д.).

По характеру относительного движения звеньев, образующих кинематическую пару, различают вращательные, поступательные, винтовые, плоские и сферические кинематические пары.

Движение механизма – самое существенное, что подлежит изучению в теории механизмов и машин. Под движением механизма понимают движение ее звеньев относительно одного звена, которое условно считают неподвижным и называют стойкой. Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные звенья.

Входное звено (вход) – это звено, которое совершает движение, заданное извне.

Выходное звено (выход) – это звено, которое совершает требуемое движение, полученное в механизме путем преобразования заданных движений выходных звеньев.

Промежуточное, или соединительное, звено – это всякое подвижное звено за исключением входных и выходных звеньев.

Основные размеры звена – это постоянные угловые и линейные размеры, образующие минимальную по числу совокупность, однозначно определяющую взаимное расположение кинематических пар звена.

Ограничимся определением основных размеров звеньев плоских рычажных механизмов. Рычажные механизмы иногда еще называют стержневыми механизмами. Особенностью рычажных механизмов является то, что их звенья образуют только низшие кинематические пары. В общем случае в плоских механизмах реализуются и высшие кинематические пары, а в плоских рычажных механизмах реализуются только вращательные и поступательные кинематические пары, обозначенные соответственно В и П.

Степень подвижности и структурная формула кинематической цепи

Рассмотрим вопрос о числе степеней свободы кинематической цепи. Если число звеньев кинематической цепи равно K , то общее число степеней свободы, которым обладает K звеньев до их соединения в кинематические пары, равно $6K$. Соединение звеньев в кинематические пары накладывает на относительное движение звеньев определенное число связей, зависящее от класса пар.

Если число пар I, II, III, IV и V-го класса будет равно соответственно P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , то из $6K$ числа степеней свободы необходимо исключить число условий связи, которые накладываются вхождением звеньев в кинематические пары. Пара I класса накладывает одну связь, II класса – две связи, III класса – три связи, IV класса – четыре, V класса – пять связей.

Соответственно число степеней свободы H , которым обладает кинематическая цепь, будет равно:

$$H = 6K - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1, \quad (1.1)$$

где K – число звеньев кинематической цепи;

$5P_5$ – число условий связи, накладываемы парами V класса;

$4P_4$ – IV класса;

$3P_3$ – III класса;

$2P_2$ – II класса;

P_1 – I класса.

В технике обычно рассматриваются такие кинематические цепи, у которых одно из звеньев принимается за неподвижное.

Степень подвижности кинематической цепи относительно неподвижного звена (стойки) называется число ее степеней свободы.

Степень подвижности кинематической цепи будет равна

$$W = H - 6. \quad (1.2)$$

Подставляя в уравнение (1.2) вместо H его выражение из уравнения (1.1), получим:

$$W = 6(K - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (1.3)$$

Обозначая $K - 1 = n$, где n – число подвижных звеньев, получим **структурную формулу для общего случая кинематической цепи (механизма):**

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1. \quad (1.4)$$

Эта формула носит название **формулы Сомова – Малышева.**

Наибольшее распространение в технике получили механизмы, звенья которых движутся параллельно одной плоскости. Эти механизмы называются **плоскими.**

Структурная формула для плоских механизмов была впервые разработана русским академиком П. Л. Чебышевым в 1869 году и носит название *формулы Чебышева*:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4. \quad (1.5)$$

Группы Ассура. Классификация

Приступая к образованию механизма, мы выполним следующие операции:

- 1) закрепляем одно из звеньев механизма, т. е. образуем стойку,
- 2) вводим в кинематические пары с этим звеном ведущие звенья (их количество определяется степенью подвижности механизма);
- 3) к ведущему звену (или ведущим звеньям) и стойке присоединяем ведомые звенья.

Стойка с присоединенным к ней ведущим звеном образует простейший механизм I класса.

Система ведомых звеньев будет представлять собой кинематическую цепь с $W = 0$, т. к. весь механизм должен обладать степенью подвижности, равной числу ведущих звеньев.

Кинематическая цепь, которая после присоединения крайними свободными элементами к стойке будет обладать нулевой степенью подвижности, и которая не может быть расчленена на самостоятельные кинематические цепи нулевой степени подвижности, называется группой Ассура.

Ассуровы группы обладают следующими свойствами:

- они всегда представляют собой плоские незамкнутые цепи с низшими парами;
- от присоединения или отсоединения групп Ассура от механизма степень его подвижности не меняется.

Таким образом, любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения к ведущему звену (или ведущим звеньям) и стойке групп Ассура. *Непременным условием* является то, чтобы группа не присоединялась к одному и тому же звену, она *должна присоединяться к двум и более звеньям*. В противном случае получаем жесткую ферму. Любой плоский механизм закономерно распадается на группы Ассура.

Из определения группы Ассура имеем:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Считаем, что все высшие пары заменены низшими, тогда:

$$W = 3n - 2P_5 = 0.$$

Отсюда

$$P_5 = \frac{3}{2}n \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) устанавливает зависимость между числом звеньев и числом кинематических пар V класса в группе Ассура. Так как количество звеньев и пар может быть только целым, то уравнению будут удовлетворять следующие сочетания звеньев и пар:

n	2	4	6	8	и т. д.
P_5	3	6	9	12	

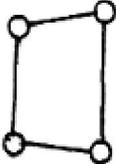
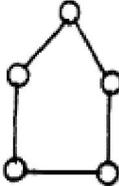
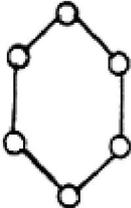
Таким образом, мы имеем бесконечное множество вариантов, каждому из которых соответствует кинематическая цепь с нулевой степенью подвижности. Задаваясь различным сочетанием n и P_5 , мы можем получить группы различного вида. Все полученные таким образом группы мы можем разбить на классы. Из первых двух групп Ассура, начинающих этот бесконечный ряд, и составляет подавляющее большинство плоских механизмов с низшими парами V класса.

Группы Ассура делятся на классы, а каждый класс – на порядки.

Класс группы определяется наивысшим классом контура, который входит в данную группу.

Класс контура определяется числом кинематических пар, в которые входят образующие его звенья (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Определение класса контура

Класс контура				
2	3	4	5	6
				

Порядок группы определяется числом свободных элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к механизму.

В качестве примера рассмотрим второе возможное сочетание чисел звеньев и пар, когда $n = 4$ и $P_5 = 6$. Для этого сочетания могут быть получены два типа кинематических цепей (рисунок 1.1, а, б).

Присоединение первой группы к основному механизму происходит посредством трех поводков – AB , EF и CD . Это группа III класса, 3 порядка.

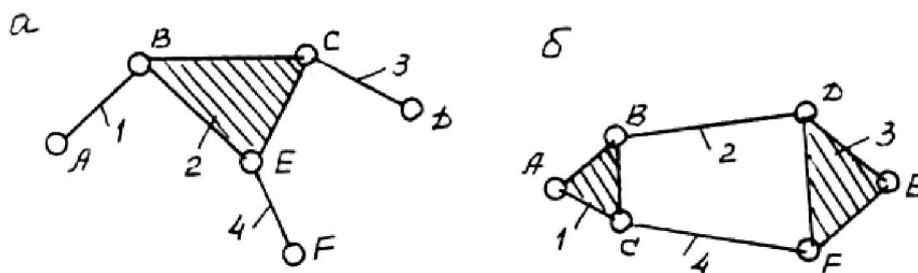


Рисунок 1.1 – Четырехзвенные группы Ассур

Кинематическая цепь из четырех звеньев и шести пар, показанная на рисунке 1.1, б, присоединяется к механизму свободными элементами пар A и E . Звенья образуют подвижный четырехсторонний замкнутый контур. Эта кинематическая цепь называется группой IV класса, 2 порядка.

Помимо класса и порядка, группы II класса имеют 5 видов в зависимости от сочетания входящих в них поступательных и вращательных кинематических пар (таблица 1.3).

Таблица 1.3 – Схемы двухповодковой группы 2–5-го видов

Вид	Схема	Вид	Схема
2		4	
3		5	

Порядок и класс группы определяют порядок и класс механизма.

Порядок механизма определяется наивысшим порядком группы, входящей в состав данного механизма.

Класс механизма определяется наивысшей по классу группой, входящей в состав данного механизма.

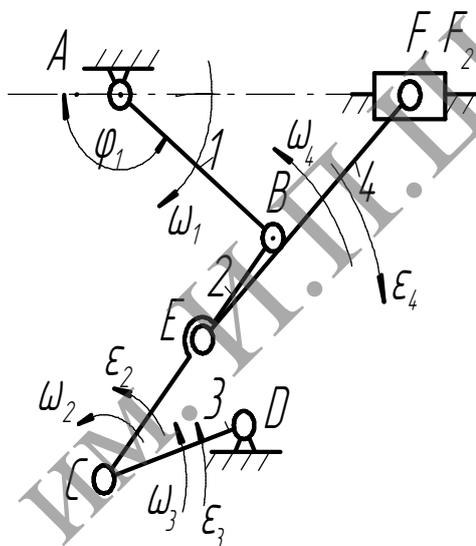
При определении класса механизма необходимо указать, какое звено механизма является ведущим, т. к. от выбора ведущих звеньев может измениться класс механизма.

Порядок структурного анализа

- 1) определяется степень подвижности механизма;
- 2) определяется состав механизма;
- 3) определяется класс механизма;
- 4) определяется порядок механизма;
- 5) составляется формула строения механизма.

Примеры решения задач

Пример 1: произвести структурный анализ механизма, показанного на рисунке.



Решение:

1. Определим число степеней свободы механизма по формуле Чебышева:

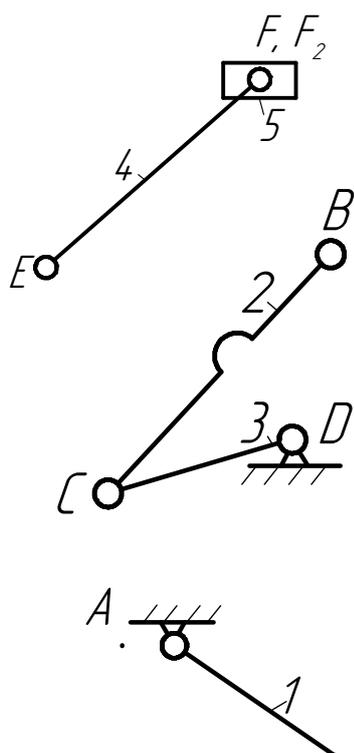
$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

В данном механизме число подвижных звеньев $n = 5$ (1, 2, 3, 4, 5), число кинематических пар пятого класса $P_5 = 7$:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| A (0, 1) – вращательная; | E (2, 4) – вращательная; |
| B (1, 2) – вращательная; | F (4, 5) – поступательная; |
| C (2, 3) – вращательная; | F_2 (5, 0) – вращательная. |
| D (3, 0) – вращательная; | |

Следовательно, $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1$

2. Определим группы Ассура, входящие в состав механизма. Начальным звеном является кривошип 1 .



Звенья 4, 5 составляют группу Ассура II-го класса, второго вида.

Оставшаяся кинематическая цепь, состоящая из звеньев 1, 2, 3, также является механизмом.

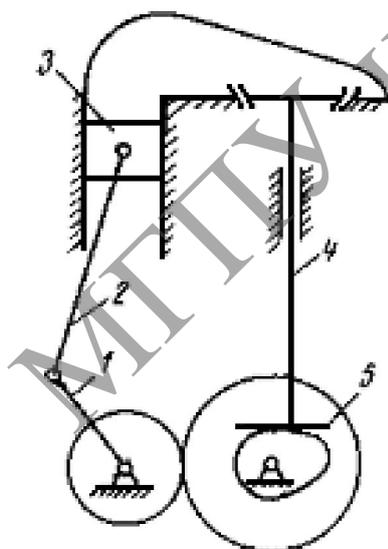
Далее можно отделить звенья 2 и 3, которые образуют группу Ассура II-го класса первого вида.

После этого остается только начальное звено 1 , которое вместе со стойкой 0 выделяем в механизм I-го класса.

3. Составим формулу строения механизма:

$$I(0, 1) \rightarrow II(2, 3) \rightarrow III(4, 5).$$

Следовательно, механизм относится ко второму классу.



Пример 2: исследовать структуру двигателя внутреннего сгорания, кинематическая схема которого изображена на рисунке.

Решение: число всех звеньев равно шести. Звено 1 – кривошип с распределительной шестерней. Обе эти детали являются одним звеном, так как они не перемещаются относительно друг друга (совершают совместное вращательное движение). Звено 2 – шатун, совершающий сложное движение. Звено 3 (поршень) совершает поступательное движение, звено 5 – кулачок с шестерней (они также вращаются вместе). Звено 4 – толкатель (клапан) – совершает поступательное движение. Звено 0 (неподвижное) – стойка.

Число всех кинематических пар равно восьми, из них шесть низших пар (четыре шарнира и две поступательные пары) и две высшие пары (зубчатая и кулачковая). Обе высшие пары являются двухподвижными, так как допускают скольжение и качение. Следовательно, одноподвижных пар $p_1 = 6$, а двухподвижных $p_2 = 2$. Степень подвижности равна:

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2 = 3(6 - 1) - 2 \cdot 6 - 2 = 1.$$

Нам показан один клапан, на самом же деле у одноцилиндрового двигателя внутреннего сгорания обычно бывает два клапана. Если при подсчете учесть оба клапана, то число степеней подвижности не изменится. Число звеньев одноподвижных и двухподвижных пар увеличится соответственно на единицу, а степень подвижности не изменится и будет равна:

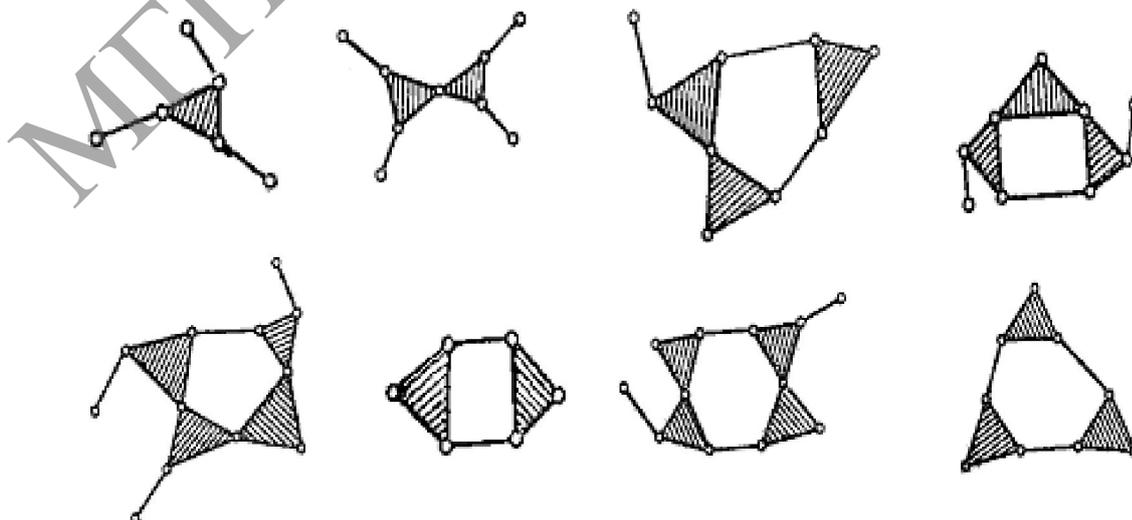
$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2 = 3(7 - 1) - 2 \cdot 7 - 3 = 1.$$

Если считать, что на рисунке изображен не одноцилиндровый двигатель, а многоцилиндровый, например шестицилиндровый, то от этого степень подвижности тоже не изменится. Подсчитаем число степеней подвижности у шестицилиндрового двигателя, который имеет 1 коленчатый вал, 6 шатунов, 6 поршней, 1 кулачковый вал, 12 клапанов и одну стойку. Всего – 27. Число одноподвижных пар цилиндр-поршень $p_1 = 32 : 6$, 6 пар поршень-шатун, 6 пар шатун-кривошип, 12 пар толкатель-стойка и 2 вращательные пары, соединяющие валы со стойкой. Число двухподвижных пар кулачковых $p_2 = 13 : 12$ и 1 зубчатая пара. Степень подвижности будет равна:

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2 = 3(27 - 1) - 2 \cdot 32 - 13 = 1.$$

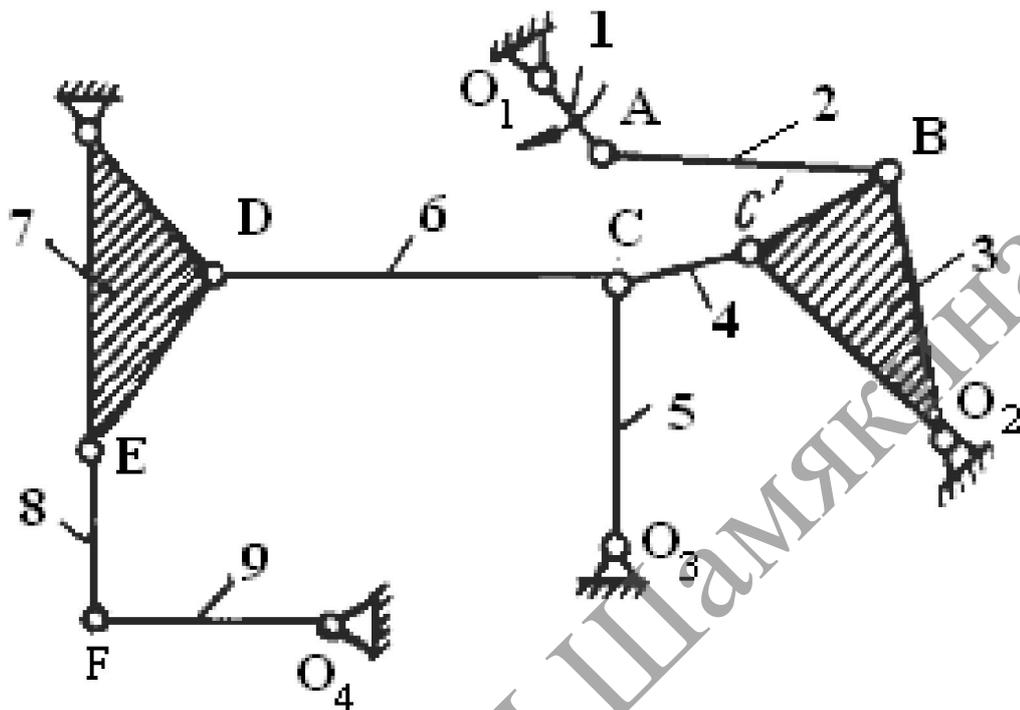
Задания для самостоятельного решения

Задание 1: определить класс, порядок и степень подвижности групп:

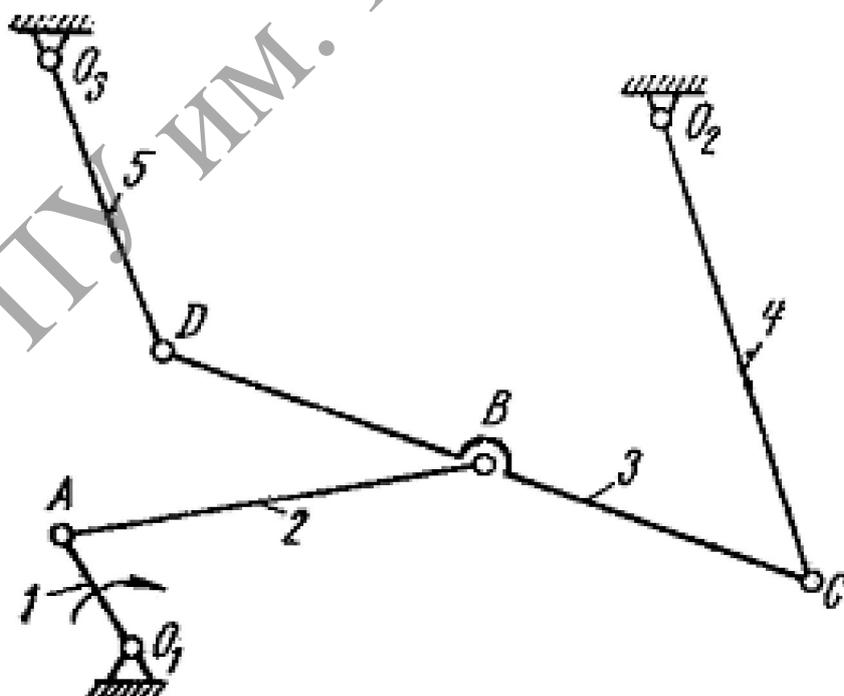


Задание 2: выполнить структурный анализ механизмов, считая ведущим 1-е звено, 5-е звено:

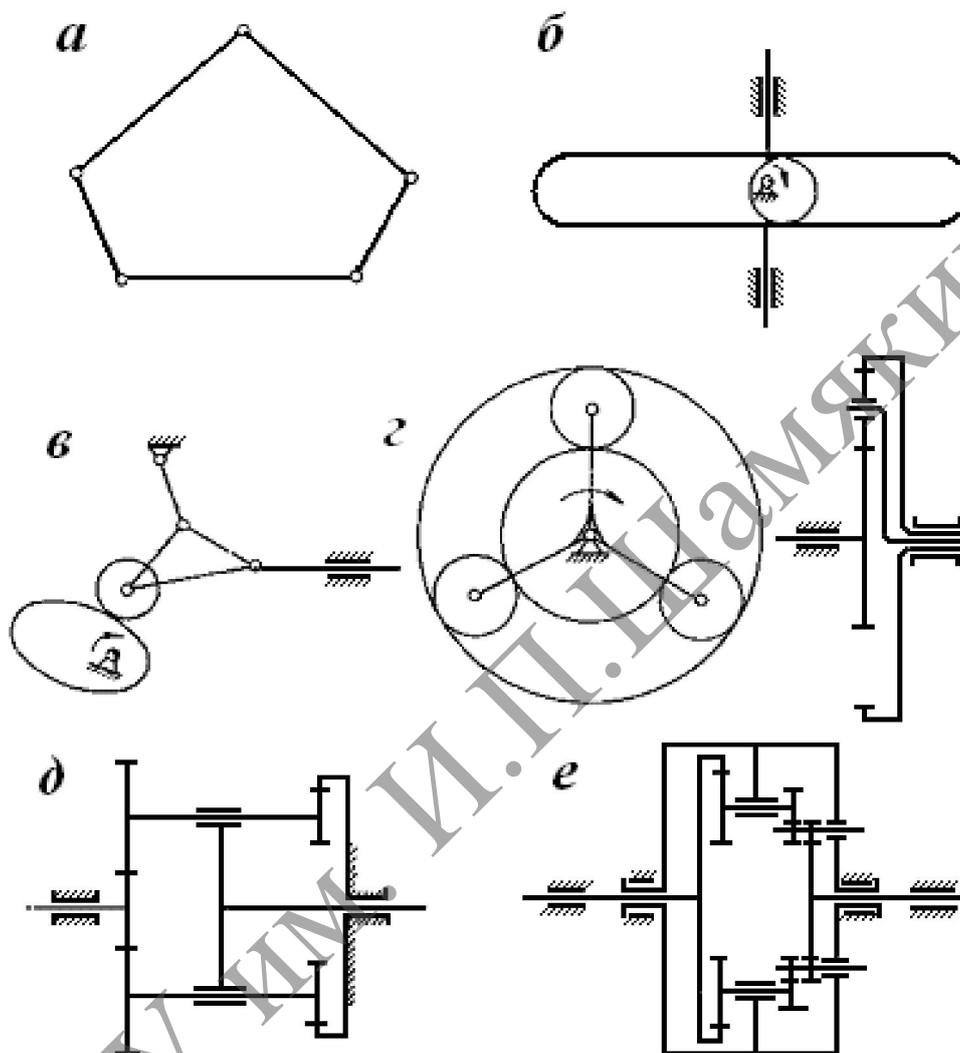
1.



2.



Задание 3: исследовать структуру механизмов, изображенных на рисунке.



Ответы:

- а – у шарнирного пятизвенника: $W = 2$ ($n = 5, p_1 = 5, p_2 = 0$);
- б – у кулисно-эксцентрикового механизма: $W = 1$ ($n = 3, p_1 = 2, p_2 = 1$);
- в – у механизма салазок машины «Линотип»: $W = 1$ ($n = 6, p_1 = 7, p_2 = 0$);
- г – у дифференциального механизма: $W = 2$ ($n = 5, p_1 = 4, p_2 = 2$, после отбрасывания лишних звеньев и пассивных связей);
- д – у двухступенчатого планетарного редуктора: $W = 1$ ($n = 4, p_1 = 3, p_2 = 2$, после отбрасывания лишних звеньев и пассивных связей);
- е – у дифференциального прибора банкаброша: $W = 2$ ($n = 6, p_1 = 5, p_2 = 3$, после отбрасывания лишних звеньев и пассивных связей).

МГТУ им. И.П.Шамякина

Практическая работа № 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Метод планов

Метод планов разработан для групп Ассура.

Суть метода:

1) построение в выбранном масштабе известных скоростей и ускорений;

2) определение неизвестных скоростей и ускорений геометрическими способами.

При этом считаем заданными уравнения движения звеньев основного механизма, к которым присоединяется исследуемая группа, и геометрические размеры звеньев, входящих в группу.

Понятие о масштабах.

В ТММ при всех расчетно-графических работах используют масштабы.

Масштабом называется отношение истинной величины к величине ее графического изображения.

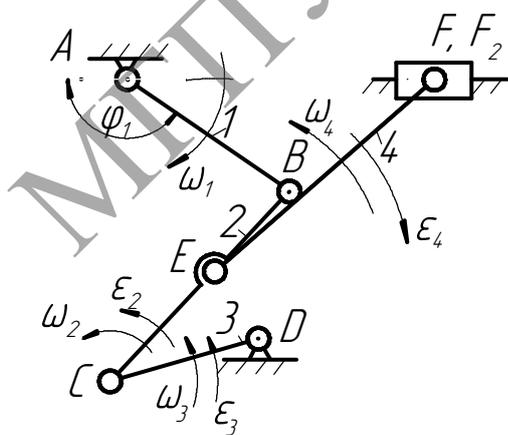
Обычно масштаб обозначают буквой μ , индекс при которой указывает на определяемую величину.

Например:

масштаб длин –
$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}, \frac{м}{мм};$$

масштаб скоростей –
$$\mu_v = \frac{V_A}{ra}, \frac{м}{с \times мм};$$

масштаб ускорений –
$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi i}, \frac{м}{с^2 \times мм}.$$



Пример решения задач

Рассмотрим построение планов скоростей и ускорений для ряда механизмов, имеющих в своем составе группы II класса.

Пример 1: построить планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма, определить скорости и ускорения точек B, C, E, угловую скорость и угловое ускорение шатуна 2, если известны:

$$\angle \varphi_1 = 150^\circ, \quad l_{AB} = 0,3 \text{ м}, \quad l_{BC} = 0,4 \text{ м}, \quad l_{EF} = 0,45 \text{ м}, \quad l_{CD} = l_{CE} = 0,25 \text{ м}, \quad l_y = 0,4 \text{ м}, \\ l_x = 0,2 \text{ м}; \text{ угловая скорость кривошипа } AB \text{ постоянна и равна } \omega_1 = 500 \text{ с}^{-1}.$$

Решение:*Порядок построения:*

1. Проводим структурный анализ и устанавливаем класс заданного механизма. Число подвижных звеньев $n = 5$, число кинематических пар 5-го класса $P_5 = 7$, число степеней свободы механизма

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Механизм образован присоединением к начальному звену AB группы Ассур второго вида, состоящей из звеньев 2, 3 и последующего присоединения к звену BC группы Ассур первого вида, состоящей из звеньев 4, 5.

2. Строим план положения механизма. Задаемся длиной отрезка $AB = 30$ мм, вычисляем масштабный коэффициент схемы механизма

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,3}{30} = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}}; \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,4}{0,01} = 40 \text{ мм};$$

$$CD = CE = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,25}{0,01} = 25 \text{ мм}; \quad EF = \frac{l_{EF}}{\mu_l} = \frac{0,45}{0,01} = 45 \text{ мм};$$

$$Y = \frac{l_Y}{\mu_l} = \frac{0,4}{0,01} = 40 \text{ мм}; \quad X = \frac{l_X}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,01} = 20 \text{ мм}.$$

По полученным размерам и заданному углу φ_1 на рисунке строим план положений механизма.

3. Переходим к построению плана скоростей. Вначале определяем линейную скорость точки B :

$$v_B = \omega_1 l_{AB} = 500 \cdot 0,3 = 150 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Строим полюс p плана скоростей (рисунок 2.1). Задаемся длиной отрезка $pb = 60$ мм. Тогда масштабный коэффициент плана скоростей:

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{150}{60} = 2,5 \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Из полюса p плана скоростей проводим вектор скорости точки B (pb) перпендикулярно звену AB , направленный в сторону вращения звена l .

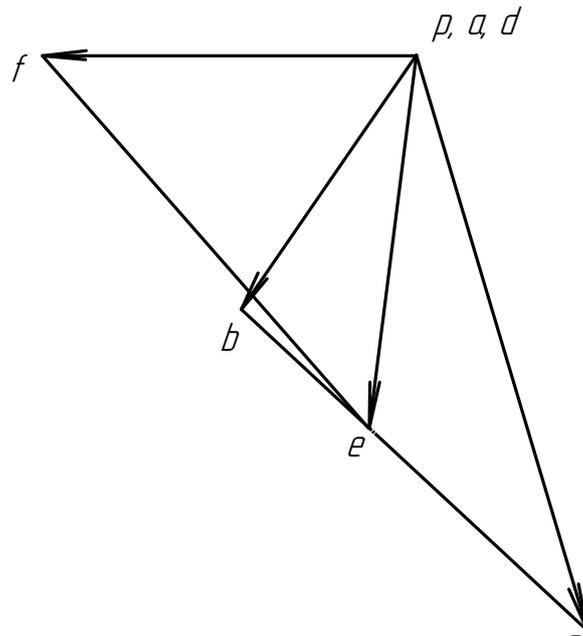


Рисунок 2.1 – План скоростей

Определим скорость точки C , принадлежащей группе Ассур (2, 3). Рассмотрим движение точки C относительно точки B и относительно точки D , принадлежащей неподвижному звену. Запишем векторные уравнения, которые решим графически:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB};$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD}.$$

Согласно первому уравнению, через точку b на плане скоростей проводим прямую, перпендикулярную звену BC . А согласно второму – через полюс p (так как $\vec{v}_D = 0$) проводим прямую, перпендикулярную звену CD . Пересечение этих прямых определит положение точки c .

Из плана скоростей имеем:

$$v_C = \mu_v(pc) = 2,5 \cdot 84 = 210 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$v_{CD} = v_C;$$

$$v_{CB} = \mu_v(bc) = 2,5 \cdot 41 = 102,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Скорость точки E определим по теореме подобия:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{(bc)}{(ce)},$$

откуда

$$(ce) = \frac{CE}{BC}(bc) = \frac{0,25}{0,4} \cdot 41 = 25,6 \text{ мм.}$$

Из точки c плана скоростей на продолжении вектора (bc) откладываем рассчитанную длину (ce) и соединяем точку e с полюсом p . Следовательно,

$$v_E = \mu_v(pe) = 2,5 \cdot 68 = 170 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Определяем угловую скорость звена 2:

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{102,5}{0,4} = 256,3 \text{ с}^{-1}$$

Для определения направления угловой скорости звена 2 мысленно переносим вектор (bc) скорости точки C относительно B параллельно самому себе в точку C на схеме механизма и устанавливаем направление вращения звена BC относительно точки B под действием этого вектора. В рассматриваемом случае угловая скорость ω_2 направлена против вращения часовой стрелки и на звене BC показана круговой стрелкой.

Угловая скорость звена 3:

$$\omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{DC}} = \frac{210}{0,4} = 525 \text{ с}^{-1}.$$

Определим скорость точки F , принадлежащей группе Ассура (4, 5). Рассмотрим движение точки F относительно точки E и относительно точки F_2 , принадлежащей неподвижному звену. Запишем векторные уравнения для этого случая:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_E + \vec{v}_{EF};$$

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{F_2} + \vec{v}_{FF_2}.$$

Согласно первому уравнению, через точку e на плане скоростей проводим прямую, перпендикулярную звену EF . А согласно второму – через полюс p (так как $\vec{v}_D = 0$) проводим прямую, параллельную направляющей $x-x$. Пересечение этих прямых определит положение точки f .

Из плана скоростей имеем:

$$v_F = \mu_v(pf) = 2,5 \cdot 51 = 127,5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_{EF} = \mu_v(ef) = 2,5 \cdot 71 = 177,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Угловая скорость звена 4:

$$\omega_4 = \frac{v_{EF}}{l_{EF}} = \frac{177,5}{0,45} = 394 \text{ с}^{-1}.$$

4. Переходим к построению плана ускорений.

Вначале определяем ускорение точки B . При постоянной угловой скорости начального звена I точка B имеет только нормальное ускорение:

$$a_B = a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 500^2 \cdot 0,3 = 75\,000 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

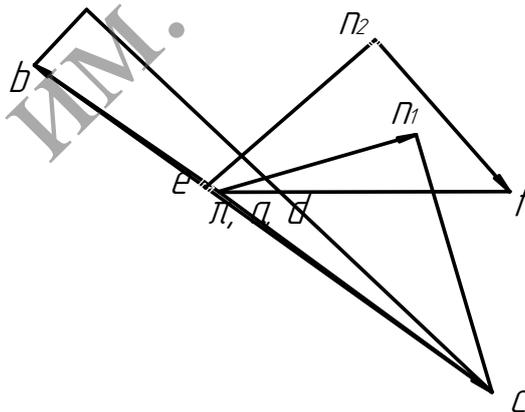


Рисунок 2.2 – План ускорений

Ускорение точки B на плане ускорений изобразим вектором $\pi b = 60$ мм, который направлен по звену AB от точки B к точке A (рисунок 2.2).

Определим масштабный коэффициент плана ускорений

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{75\,000}{60} = 1\,250 \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$$

Для определения ускорения точки C составим два векторных уравнения, рассматривая движение точки C относительно точек B и D (точка D принадлежит неподвижному звену):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau};$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau}.$$

Ускорение точки D равно нулю.

В первом уравнении нормальное ускорение \vec{a}_{CB}^n направлено по шатуну BC от точки C к точке B . Величина ускорения:

$$\vec{a}_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC} = 256,3^2 \cdot 0,4 = 26\,276 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Тангенциальное ускорение \vec{a}_{CB}^{τ} направлено перпендикулярно звену BC , а величина его определяется построением плана ускорений (при завершении построения).

Во втором уравнении нормальное ускорение \vec{a}_{CD}^n направлено по звену CD от точки C к точке D . Величина ускорения:

$$\vec{a}_{CD}^n = \omega_3^2 l_{CD} = 525^2 \cdot 0,25 = 68\,906 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Тангенциальное ускорение \vec{a}_{CD}^{τ} направлено перпендикулярно звену CD , а величина его также определяется построением плана ускорений (при завершении построения).

В соответствии с первым уравнением на плане ускорений через точку b проводим прямую, параллельную звену BC , и откладываем на ней в направлении от точки C к точке B вектор (\overline{bn}) , представляющий в масштабе μ_a ускорение \vec{a}_{CB}^n

$$b_n = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{26\,276}{1\,250} = 21 \text{ мм}.$$

Через точку n проводим прямую в направлении вектора тангенциального ускорения \vec{a}_{CB}^{τ} перпендикулярно к звену BC .

В соответствии со вторым уравнением через полюс π и совпадающую с ним точку D проводим прямую, параллельную звену CD , и откладываем

на ней в направлении от точки C к точке D вектор $(\overrightarrow{dn_1})$, представляющий в масштабе μ_a ускорение \vec{a}_{CD}^n :

$$dn_1 = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a} = \frac{68\,906}{1\,250} = 55 \text{ мм.}$$

Через точку n_1 проводим прямую в направлении тангенциального ускорения \vec{a}_{CD}^r перпендикулярно к звену CD . Точка пересечения линий действия тангенциальных ускорений определяет конец вектора полного ускорения точки C .

Величины ускорений определим, умножая длины соответствующих векторов на масштабный коэффициент:

$$a_C = \mu_a(\pi c) = 1\,250 \cdot 80,5 = 100\,625 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$a_{CB}^r = \mu_a(nc) = 1\,250 \cdot 137 = 171\,250 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$a_{CD}^r = \mu_a(n_1 c) = 1\,250 \cdot 57 = 71\,250 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Ускорение точки E определим, согласно теореме подобия ускорений, из пропорции:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{(bc)}{(ce)},$$

откуда

$$(ce) = \frac{CE}{BC}(bc) = \frac{0,25}{0,40} \cdot 140 = 88 \text{ мм.}$$

Из точки c плана ускорений на продолжении вектора (bc) откладываем рассчитанную длину (ce) и соединяем точку e с полюсом π .

Величина ускорения точки E :

$$a_E = \mu_a(\pi e) = 1\,250 \cdot 12,5 = 15\,625 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Определим ускорение точки F , принадлежащей группе Ассура (4, 5). Рассмотрим движение точки F относительно точки E и относительно точки F_2 , принадлежащей неподвижному звену. Векторное уравнение для этого случая:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_E + \vec{a}_{FE}^n + \vec{a}_{FE}^r.$$

В первом уравнении нормальное ускорение \vec{a}_{FE}^n направлено по звену EF от точки F к точке E . Величина ускорения:

$$\vec{a}_{FE}^n = \omega_4^2 l_{EF} = 394^2 \cdot 0,45 = 69\,856 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Тангенциальное ускорение \vec{a}_{FE}^τ направлено перпендикулярно звену EF , а величина его определяется построением плана ускорений (при завершении построения).

Согласно первому уравнению, через точку e на плане ускорений проводим прямую, параллельную звену EF , и откладываем от точки F к точке E вектор $(\overline{en_2})$, представляющий в масштабе μ_a ускорение \vec{a}_{FE}^n :

$$en_2 = \frac{a_{EF}^n}{\mu_a} = \frac{69\,856}{1\,250} = 56 \text{ мм}.$$

Через точку n_2 проводим прямую в направлении вектора тангенциального ускорения \vec{a}_{FE}^τ перпендикулярно к звену EF . Затем через полюс π и совпадающую с ним точку F_2 проводим прямую параллельно направляющей $x-x$. Точка пересечения этих прямых определяет конец вектора полного ускорения точки F .

Величину ускорения точки F определим через масштабный коэффициент:

$$a_F = \mu_a(\pi f) = 1\,250 \cdot 50 = 62\,500 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2};$$

$$a_{EF}^\tau = \mu_a(n_2 f) = 1\,250 \cdot 25 = 31\,250 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Величины угловых ускорений звеньев:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{171\,250}{0,4} = 428\,125 \text{ с}^{-2};$$

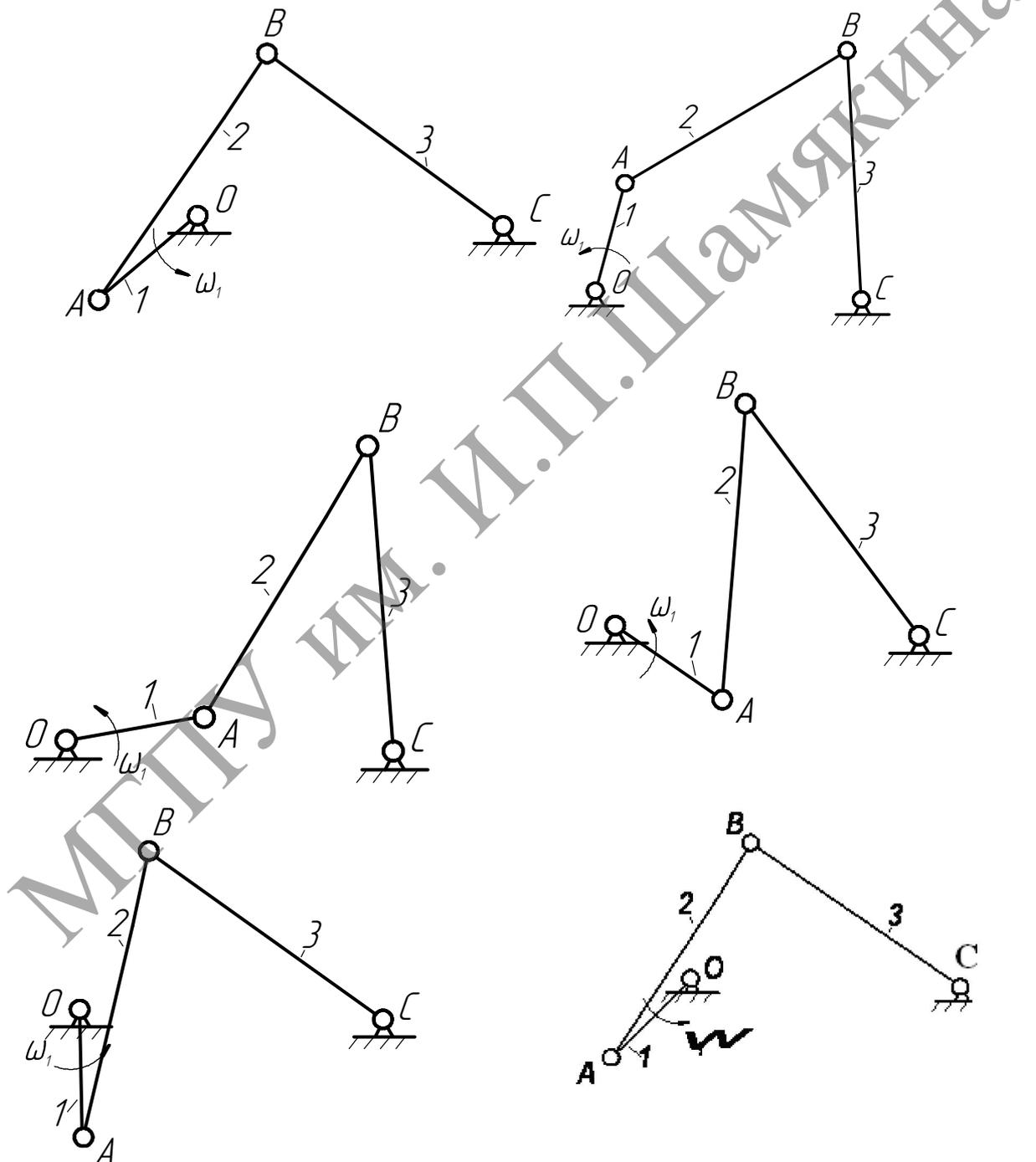
$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{71\,250}{0,25} = 285\,000 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{EF}^\tau}{l_{EF}} = \frac{31\,250}{0,45} = 69\,444 \text{ с}^{-2}.$$

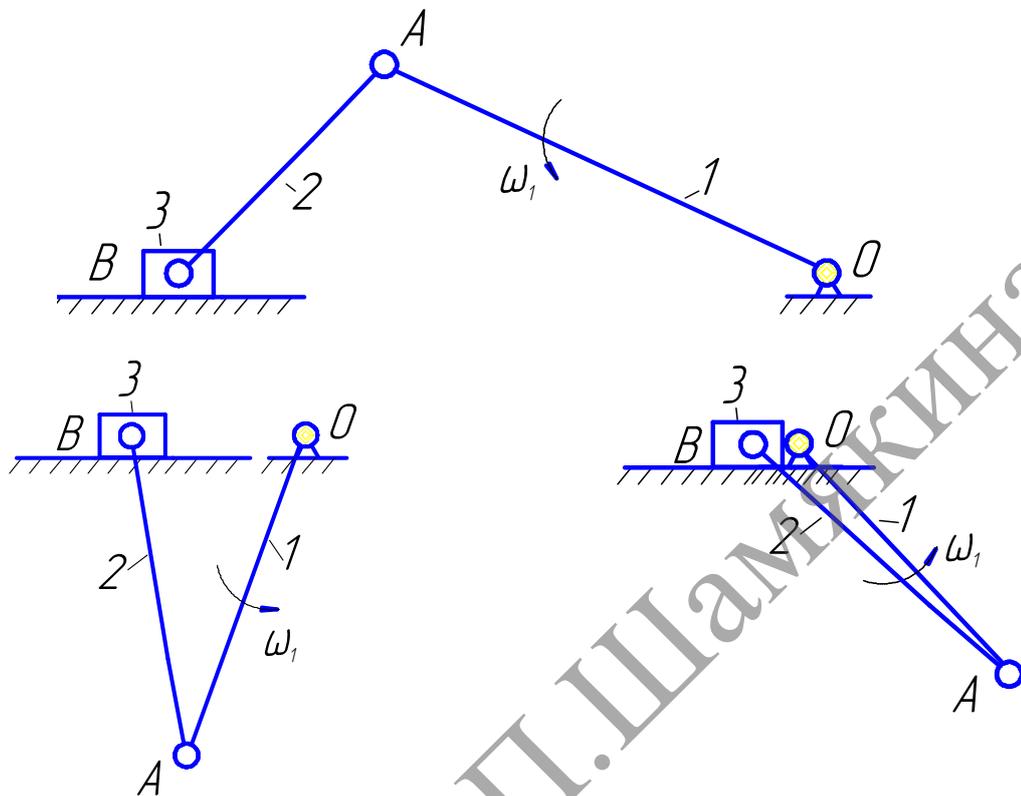
Направление углового ускорения звена 2 определим, если мысленно перенесем вектор $(\vec{n}\vec{c})$ из плана ускорений в точку C звена BC . В данном случае ε_2 направлено против часовой стрелки. Аналогично определяются направления остальных угловых ускорений (показаны стрелками на кинематической схеме).

Задания для самостоятельного решения

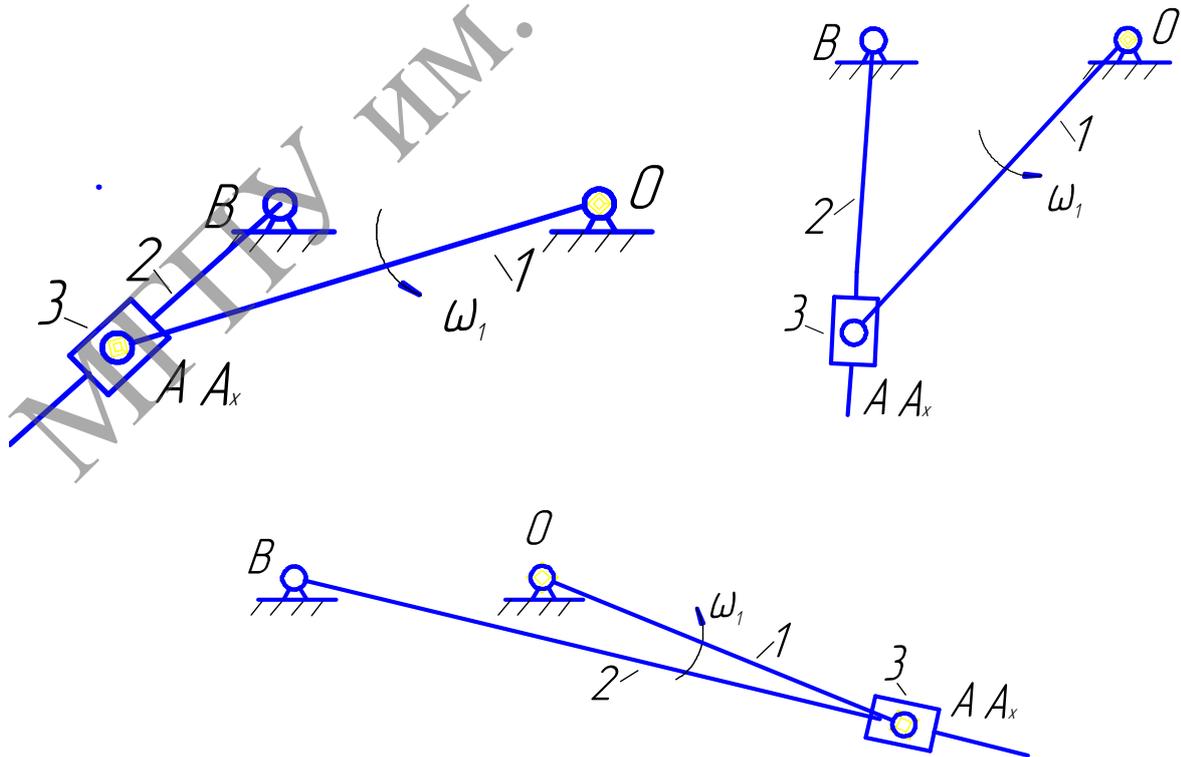
Задание 1: построить планы скоростей и ускорений для предложенных положений кривошипно-шатунного механизма:

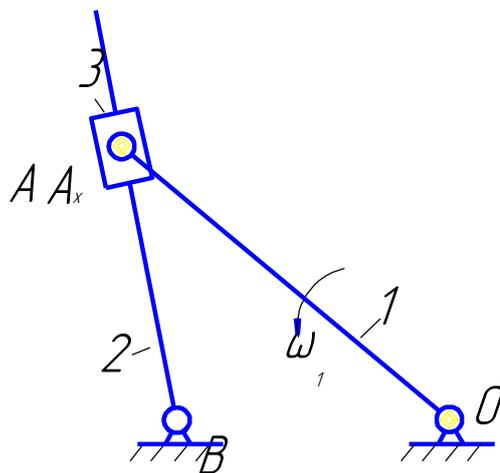


Задание 2: построить планы скоростей и ускорений для предложенных положений кривошипно-ползунного механизма:



Задание 3: построить планы скоростей и ускорений для предложенных положений механизма качающейся кулисы:





Метод кинематических диаграмм

Кинематическая диаграмма представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров звена: перемещения, скорости или ускорения как функции времени или обобщенной координаты (заданного перемещения начального звена).

Для построения диаграммы перемещений исследуемого звена пользуются методом засечек: отмечают на кинематической схеме механизма положения исследуемой точки C через равные промежутки времени за один цикл работы механизма. Отсчет перемещений ведут от начального положения точки C_1 (C_1C_2 , C_1C_3 , C_1C_4 и т. д.).

Полученные значения перемещений используют для построения диаграммы $S = S(t)$ (рисунок 2.3). Если отрезки C_1C_i откладывать без изменения масштаба, то масштаб диаграммы $S_C = S_C(t)$ по оси ординат будет равен μ_1 , т. е. масштабу построения кинематической схемы.

Для построения диаграмм $V_C = V_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ отрезки, изображающие скорости V_C и ускорения a_C на планах скоростей и ускорений, откладывают на ординатах в соответствующие моменты времени с соблюдением знаков.

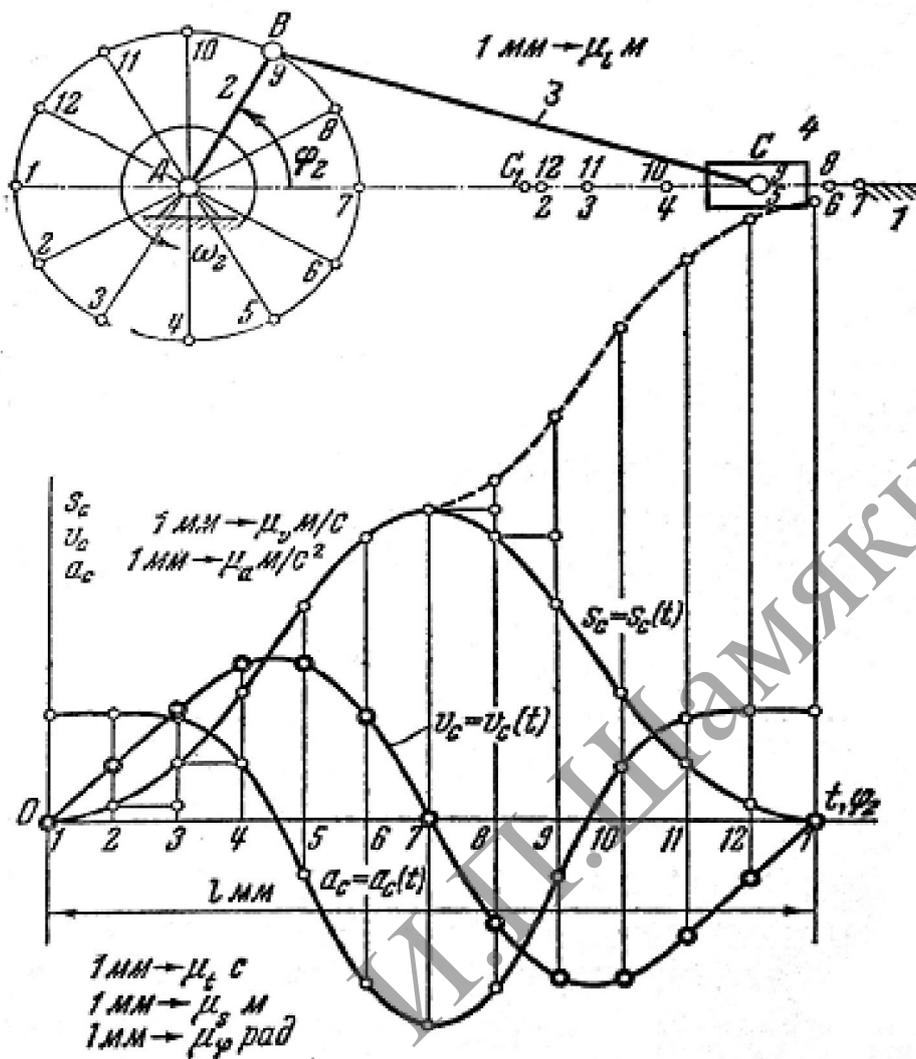


Рисунок 2.3 – Кинематический анализ кривошипно-шатунного механизма методом кинематических диаграмм

Методы графического дифференцирования

Из курса общей физики известно, что величина скорости выражается первой производной пути по времени, т. е.

$$V = \frac{dS}{dt}$$

Если функция задана графически $S = S(t)$, то для построения графика скорости $V = V(t)$ необходимо произвести графическое дифференцирование функции $S = S(t)$.

Направление производной в каждый момент времени совпадает с направлением касательной к функции.

На рисунке 2.4 представлен график перемещения. Рассмотрим зависимость скорости от угла α наклона касательной к оси OX .

Масштаб перемещений:

$$\mu_s = \frac{S}{S_{ГР}};$$

Масштаб времени:

$$\mu_t = \frac{t}{t_{ГР}}.$$

Согласно рисунку 2.4, тангенс угла наклона касательной:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dS_{ГР}}{dt_{ГР}} \quad (2.1)$$

Скорость в рассматриваемой точке равна:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{\mu_s \cdot dS_{ГР}}{\mu_t \cdot dt_{ГР}} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, скорость пропорциональна тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс:

$$V = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.2)$$

Это значит, что ординаты, отсекаемые касательными, построенными из одного полюса, будут пропорциональны значениям скорости в соответствующие моменты времени. На этом основан метод графического дифференцирования.

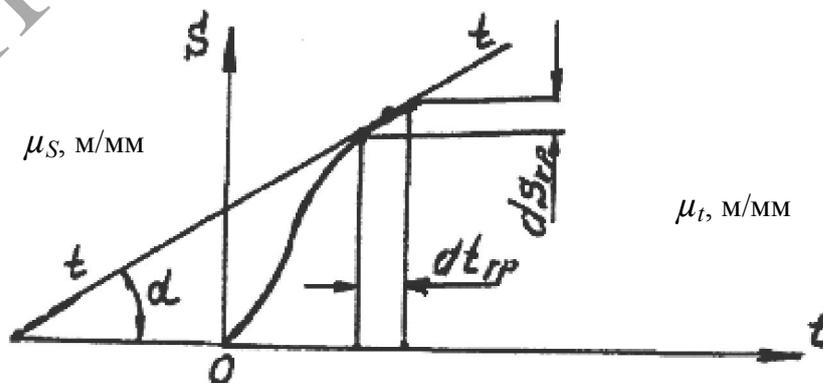


Рисунок 2.4 – График зависимости перемещения по времени

Проведение касательных к кривой может привести к большим неточностям. Поэтому на практике чаще применяют другие способы дифференцирования. Наиболее распространенным является *метод хорд*. График скоростей, построенный по заданному графику перемещения методом хорд, показан на рисунке 2.5.

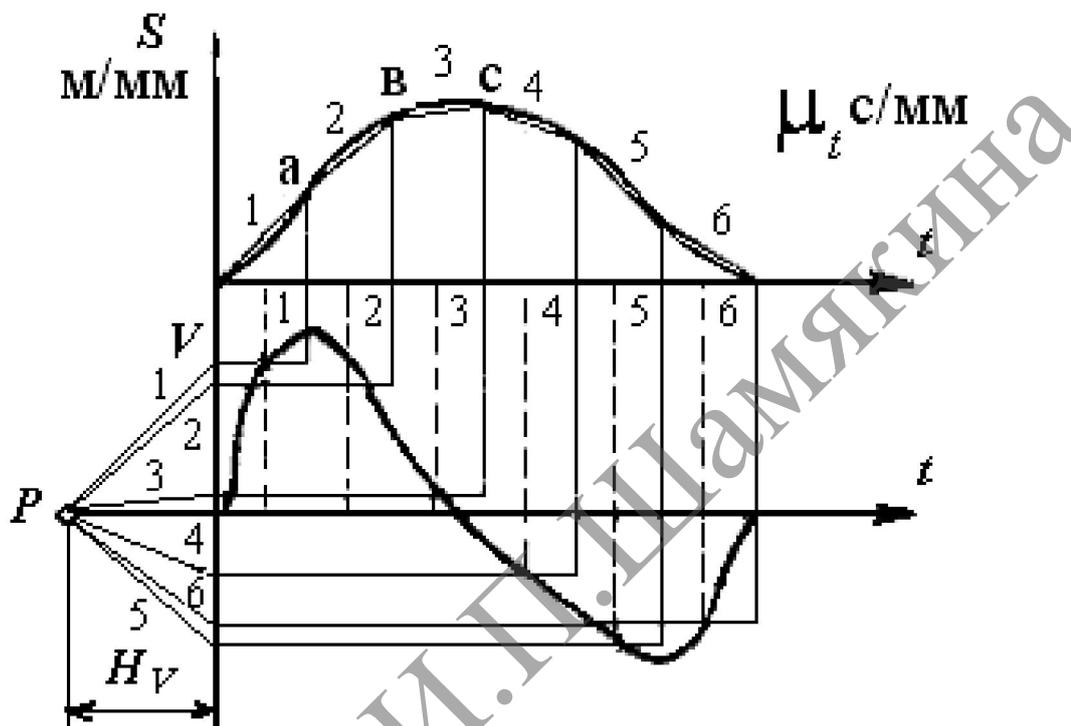


Рисунок 2.5 – График построения перемещения методом хорд

Последовательность построения:

- 1) проводят хорды Oa , ab , bc , ...;
- 2) выбирают полюс P на расстоянии H_V , которое рекомендуется брать равным 40–60 мм;
- 3) из полюса P проводят лучи 1, 2, 3, ... параллельные соответствующим хордам до пересечения с осью ординат;
- 4) из точек пересечения проводят горизонтальные линии, параллельные оси времени t , до пересечения с линиями, параллельными оси перемещения S , которые проведены из середины отрезков времени 01 , 12 , 23 и т. д.;
- 5) соединив точки их пересечения 1, 2, 3, ... плавной кривой, получают искомый график скорости.

Метод графического дифференцирования не является достаточно точным, он позволяет определять приближенные значения ускорений и скоростей. Для проверки правильности построения диаграммы скоростей можно пользоваться следующими очевидными условиями:

- а) \max (\min) ординате на диаграмме перемещений соответствует нулевая ордината на диаграмме скорости;

б) точки перегиба диаграммы перемещений соответствуют max (min) на диаграмме скоростей;

в) подъему кривой перемещения соответствуют положительные, а опусканию отрицательные ординаты кривой скорости.

Для определения масштаба μ_V графика скоростей можно записать:

$$\mu_V = \frac{V}{V_{ГР}} = \frac{\mu_S \operatorname{tg} \alpha}{\mu_t H_V \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\mu_S}{\mu_t H_V},$$

т. е.

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{\mu_t H_V}, \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}. \quad (2.3)$$

Из формулы (2.3) видно, что на величину масштаба скорости влияет произвольно выбранная длина отрезка H_V (полюсное расстояние при построении графика скорости).

Для построения графика $a = a(t)$ ускорения по времени достаточно произвести графическое дифференцирование графика $V = V(t)$ скорости. Последовательность операций такая же, как и при дифференцировании графика $S = S(t)$.

Методы графического интегрирования

Если закон движения звена задается в виде графика скорости или ускорения, для построения кинематических диаграмм необходимо произвести графическое интегрирование заданной функции.

Пусть задана диаграмма ускорения $a_C = a_C(t)$ (рисунок 2.6).

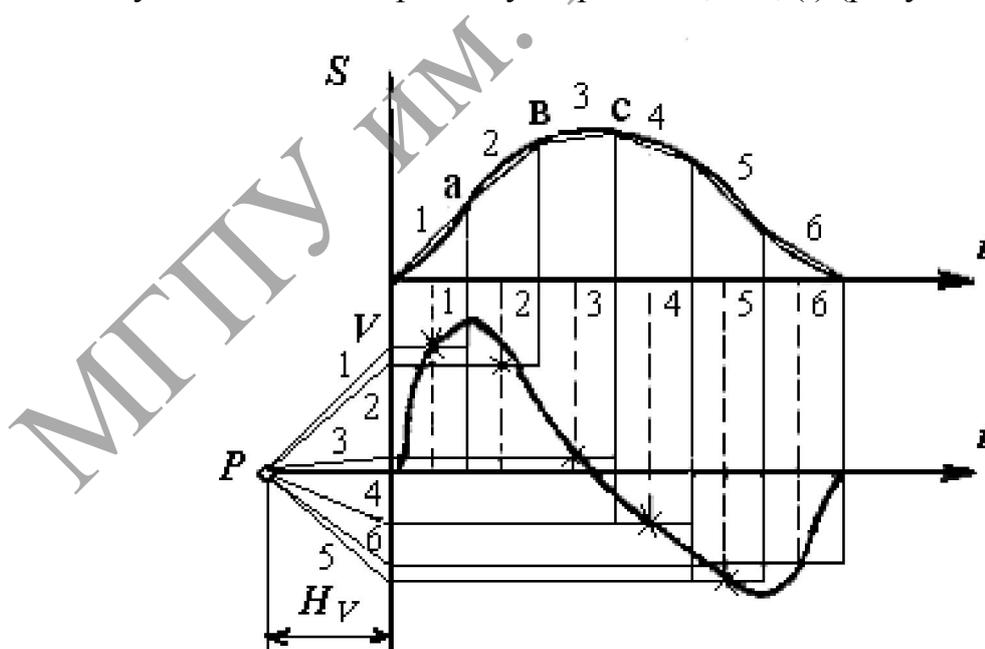


Рисунок 2.6 – График построения перемещения методом графического интегрирования

Последовательность построения:

диаграмма скоростей

1) ось абсцисс разбивается на равные промежутки, и из полученных точек проводятся ординаты (1–1'), (2–2'), (3–3') и т. д.;

2) приращение скорости V_C за промежутков времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно:

$$V_{C_1} - V_{C_2} = \int_{t_1}^{t_2} a_C dt;$$

3) искомый интеграл может быть выражен через площадь $S_{[1'1'2'2']}$, умноженную на произведение масштабов по осям μ_a и μ_t :

$$V_{C_1} - V_{C_2} = \mu_a \mu_V S_{[1'1'2'2]};$$

4) площадь $S_{[1'1'2'2]}$ в мм² может быть определена планиметром, наложением миллиметровой сетки или путем замены равновеликим прямоугольником или трапецией;

5) полученное значение скорости V_{C_2} откладываем в масштабе μ_V на ординате, проведенной в точке 2:

$$dV_i = dS_i \mu_a \mu_t;$$

6) аналогично находят значения скоростей для остальных точек цикла

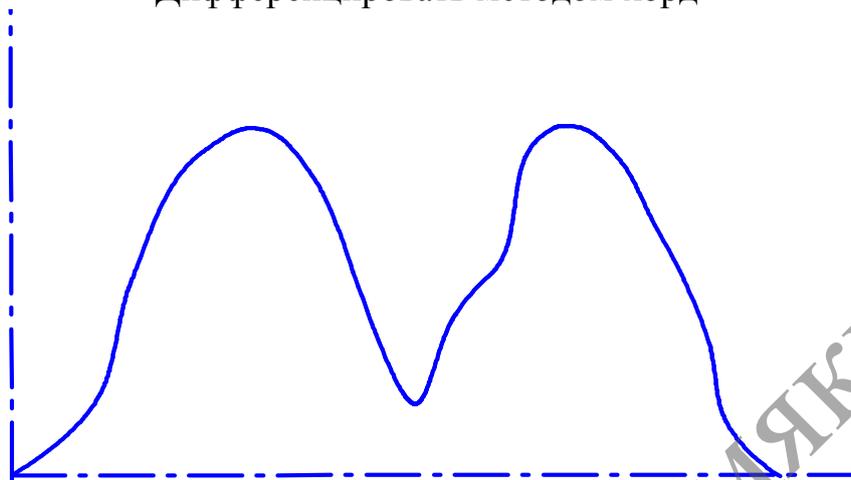
$$V_i = V_{i-1} = dV_i.$$

Соединив концы построенных отрезков плавной кривой, получают искомый график скорости.

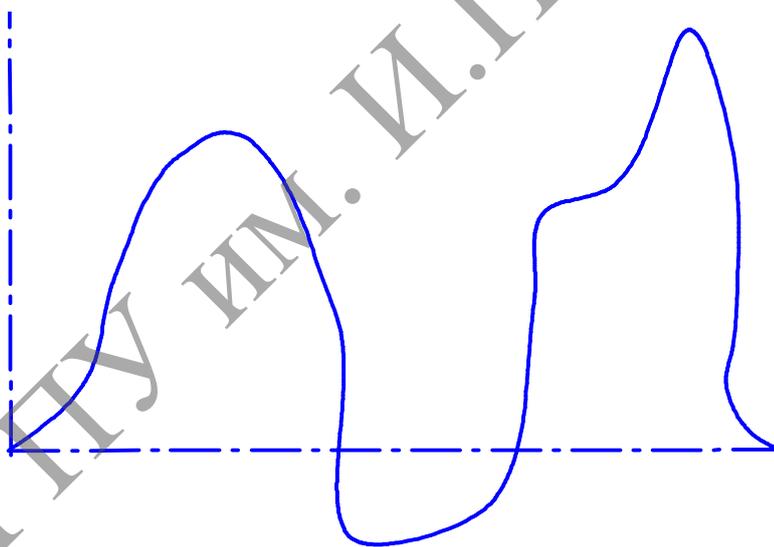
После построения диаграммы скоростей аналогичным образом можно построить *диаграмму перемещений*.

Задания для самостоятельного решения

Дифференцировать методом хорд



Интегрировать методом хорд



Практическая работа № 3. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

Кулачковые механизмы нашли широкое применение в машино- и приборостроении. Их основное преимущество – возможность воспроизведения практически любого сложного закона движения ведомого звена (например, движение рабочего органа с паузами).

Требуемое сложное движение выходного звена обеспечивается особенностями конструкции кулачковых механизмов.

С другой стороны, именно с этими особенностями связаны основные недостатки кулачковых механизмов:

- 1) повышенный износ рабочей поверхности кулачка ввиду наличия высшей кинематической пары;
- 2) необходимость замыкания пары;
- 3) возможность отхода ведомого звена и ударов во время работы;
- 4) сложность изготовления.

Для предохранения рабочей поверхности кулачка от быстрого износа на конце толкателя ставится ролик, а для замыкания звеньев устанавливают пружину.

Плоские кулачковые механизмы (с вращающимся кулачком) делятся на две группы:

- I группа преобразует вращательное движение в поступательное;
- II группа преобразует вращательное движение в колебательное.

Каждая из этих групп по форме элемента ведомого звена делится на три подгруппы, в которых кулачок работает:

- а) по острию;
- б) по ролику;
- в) по плоскости.

Кулачковые механизмы, преобразующие вращательное движение в поступательное, у которых кулачок работает по острию или по ролику, в свою очередь делятся еще на *центральные* и *дезаксиальные*.

Центральными называются механизмы, у которых ось толкателя проходит через центр вращения кулачка.

В *дезаксиальных* механизмах ось толкателя смещена относительно центра вращения кулачка на некоторую величину e , называемую *дезаксиалом*.

Основные параметры кулачка

На рисунке 3.1 показан кулачок, профиль которого вычерчен четырьмя дугами окружностей. Дуга ab проведена из центра O_1 дуга bc – из центра O_2 , дуга cd – из центра O_1 и дуга da – из центра O'_2 .

При построении графика перемещения ведомого звена обычно указывается только *рабочий угол кулачка* φ_p , равный:

$$\varphi_p = \varphi_y + \varphi_d + \varphi_6.$$

Угол ближнего стояния φ_6 соответствует минимальному радиусу кривизны профиля кулачка R_0 и паузе в движении ведомого звена.

Анализ кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы представляют собой механизмы, имеющие высшую пару.

Для проведения структурного анализа производится замена высшей пары на кинематическую цепь с низшими парами, после чего механизм может быть разбит на группы Ассура.

Для кинематического анализа кулачковых механизмов используются те же методы, которые мы использовали для анализа плоских рычажных механизмов:

- 1) аналитический метод;
- 2) метод планов скоростей и ускорений;
- 3) метод кинематических диаграмм.

Метод планов скоростей и ускорений применяется после замены высшей пары в кулачковом механизме на кинематическую цепь с низшими парами. Методика построения планов скоростей и ускорений такая же, как при кинематическом анализе рычажных механизмов. Кинематический анализ механизмов, у которых кулачок имеет произвольный профиль, производится методом кинематических диаграмм.

Методика построения кинематических диаграмм

По кинематической схеме механизма определяют перемещения толкателя, соответствующие различным положениям кулачка (повороту кулачка на определенный угол), затем по этим перемещениям строят кинематический график $S - t$. Скорость и ускорение толкателя определяют графическим дифференцированием графика $S - t$.

Пример решения задач

Пример 1: анализ центрального кулачкового механизма, в котором кулачок работает по толкателю с острием.

Пусть задана кинематическая схема центрального кулачкового механизма (рисунок 3.2, а); требуется произвести кинематический анализ, считая, что кулачок вращается равномерно и делает n_1 оборотов в минуту.

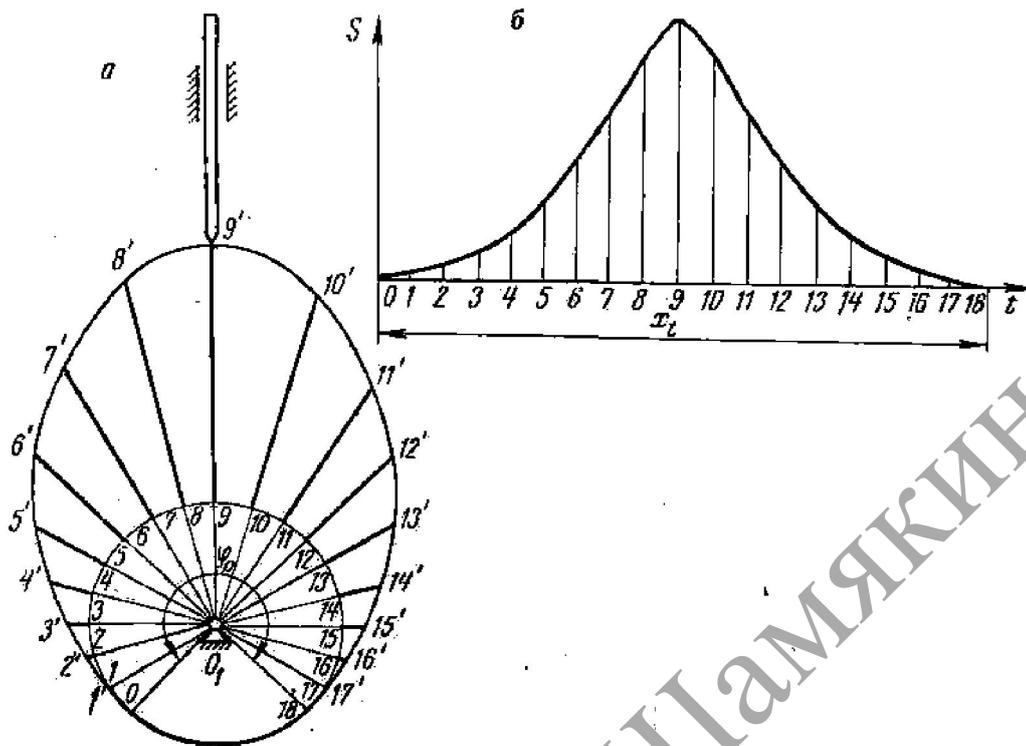


Рисунок 3.2 – Пример кинематического анализа кулачкового механизма

Чтобы определить перемещения толкателя, можно было бы каждый раз вычерчивать новое положение механизма, в котором кулачок повернут на определенный угол. Но так как кулачок имеет сложный профиль, то вычерчивать его несколько раз слишком трудоемко, поэтому при исследовании кулачковых механизмов применяют *метод обращенного движения*. При этом методе кулачок вычерчивается один раз (в любом положении) и считается неподвижным; стойке (вместе с толкателем) сообщается вращательное движение вокруг оси кулачка с угловой скоростью (кулачка), но в противоположном направлении. В таком *обращенном движении* перемещение толкателя относительно кулачка будет такое же, как и в истинном движении при неподвижной стойке.

Метод обращенного движения состоит в том, что всем звеньям механизма условно сообщается вращение со скоростью, равной скорости вращения кулачка, но в обратном направлении. Тогда кулачок становится условно неподвижным, а толкатель вместе со стойкой будет совершать вращательное движение с угловой скоростью кулачка ω_k . Поступательное движение толкателя при этом сохраняется.

Чтобы найти перемещение толкателя, проводим окружность минимального радиуса кулачка. На этой окружности откладываем рабочий угол φ_p и делим его на несколько равных частей (на рисунке 3.2, а – рабочий угол кулачка разделен на 18 частей). Через точки делений проводим радиусы и продолжаем их до пересечения с профилем кулачка.

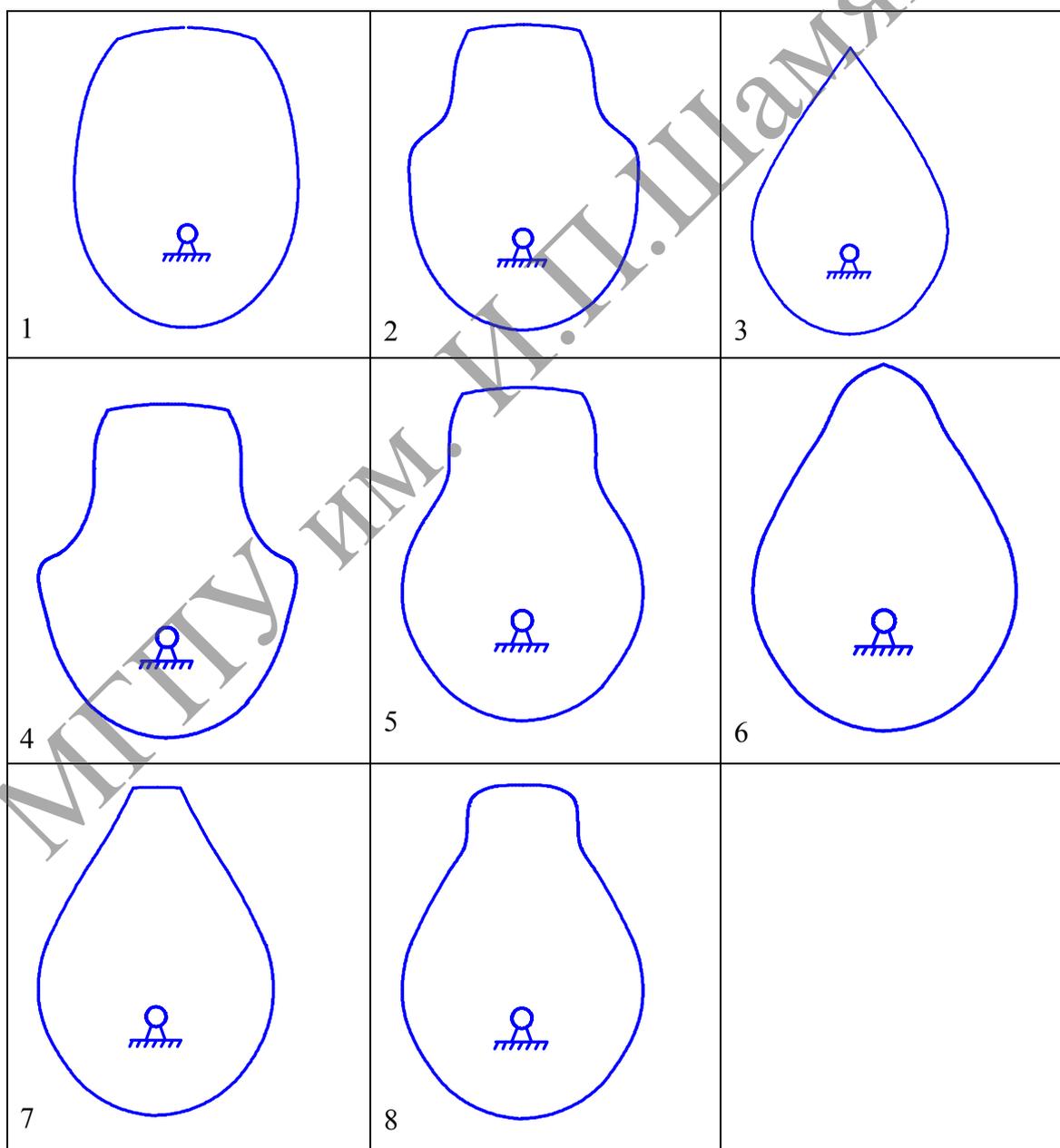
Расстояния от окружности минимального радиуса до профиля кулачка, измеренные по продолжениям радиусов, и есть перемещения толкателя, соответствующие повороту кулачка на угол, определяемый номером деления.

Отложив найденные перемещения толкателя (как ординаты) от оси абсцисс на одинаковом расстоянии друг от друга, получим график $S-t$ (рисунок 3.2, б).

Чтобы найти скорости и ускорения толкателя, нужно график $S-t$ дважды графически проинтегрировать.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: по имеющемуся профилю кулачка выполнить кинематический анализ кулачковых механизмов методом кинематических диаграмм.



Практическая работа № 4.

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Общие сведения. Виды передач

Зубчатым колесом называется звено с замкнутой системой зубьев, обеспечивающее за свой полный оборот непрерывность движения парного звена в одном направлении.

Зубчатые колеса служат для передачи вращательного движения с одного вала на другой с той же или измененной угловой скоростью.

Зубчатая передача (ЗП) – трехзвенный механизм, оба подвижных звена которого являются зубчатыми колесами.

Аксоида – геометрическое место мгновенных осей вращения.

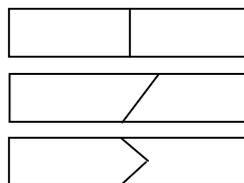
Зубчатые механизмы можно классифицировать по следующим признакам:

- по взаимному расположению осей вращения звеньев:
 - оси параллельны;
 - оси пересекаются;
 - оси перекрещиваются в пространстве;
- по числу ступеней передачи;
- по форме профиля зуба (эвольвентные, неэвольвентные);
- по способу зацепления (внутренние и внешние).

1. ЗП с параллельными осями – **цилиндрические зубчатые передачи** – огибающая колеса (**аксoid**) – цилиндр.

Цилиндрические зубчатые колеса в зависимости от формы зубьев делятся:

- на прямозубые;
- на косозубые;
- на шевронные.



2. ЗП с перекрещивающимися осями – **конические зубчатые передачи**. Огибающая колеса (**аксoid**) – усеченный конус.

3. ЗП с перекрещивающимися осями – **гиперболоидные**. **Аксoidы** – гиперболы, касающиеся друг друга по образующей.

Гиперболоидные зубчатые передачи бывают трех видов:

1. **Винтовая** – гиперболоидная передача, составленная из цилиндрических косозубых колес.

2. **Гипоидная** – гиперболоидная передача, составленная из конических зубчатых колес.

3. **Червячная** – отличается от винтовой тем, что одним звеном передачи является не колесо, а **червяк**, представляющий собой винт.

Геометрические параметры цилиндрических колес

На рисунке 4.1 показаны основные параметры цилиндрического колеса.

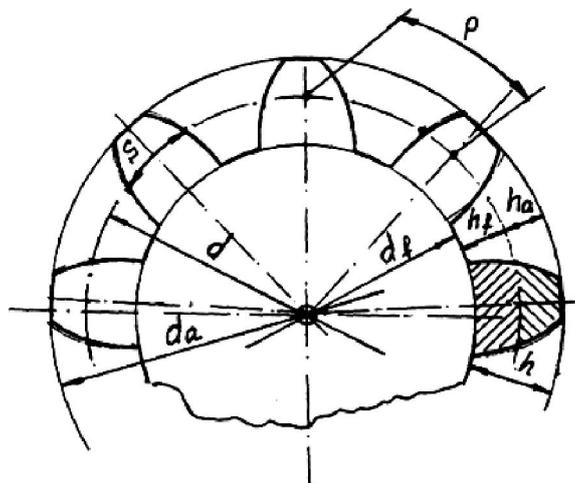


Рисунок 4.1 – Геометрические параметры зубчатого колеса

Окружности d_1 и d_2 являются **центроидами** зубчатых колес в относительном движении, они называются *начальными* или *делительными* окружностями.

Центроида – геометрическое место мгновенных центров вращения.

Начальные окружности всегда соприкасаются в мгновенном центре вращения, называемом **полюсом зацепления** P , и перекатываются друг по другу без скольжения.

Расстояние по дуге делительной окружности между одноименными точками соседних зубьев называется *шагом зацепления* – p .

Длину делительной окружности можно выразить через диаметр $L = \pi d$, а также через шаг и число зубьев $L = pz$.

Приравнивая их, имеем: $\pi d = pz$, откуда получаем:

$$p = \frac{\pi d}{z}. \quad (4.1)$$

Из уравнения (4.1) видно, что шаг зацепления зубчатых колес всегда выражается через диаметр окружности несоизмеримым числом, т. к. в правую часть входит иррациональное число π . Это затрудняет подбор размеров зубчатых колес. Поэтому для определения основных параметров зубчатых колес в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый **модулем зацепления**, который измеряется в миллиметрах:

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (4.2)$$

Для нормального (не корригированного) зубчатого колеса
высота головки зуба:

$$h_a = f_a m;$$

высота ножки зуба:

$$h_f = f_f m,$$

где f_f – коэффициент высоты ножки зуба; $f_f = 1,25$;

f_a – коэффициент высоты головки зуба; $f_a = 1$;

полная высота зуба:

$$h = h_a + h_f = 2,25 m. \quad (4.3)$$

диаметр делительной окружности:

$$d = mz; \quad (4.4)$$

диаметр окружности вершин зубьев:

$$d_a = d + 2h_a = m(z + 2); \quad (4.5)$$

диаметр окружности впадин:

$$d_f = d - 2h_f = m(z - 2,5). \quad (4.6)$$

Для беззазорного зацепления толщина зуба по делительной окружности равна ширине впадины:

$$S = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2} \quad (4.7)$$

Расстояние между центрами колес a будет равно:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \quad (4.8)$$

Профили зубьев должны быть взаимоогибоемыми кривыми. Наиболее распространен эвольвентный профиль.

При эвольвентном профиле зацепления общая нормаль в каждой точке соприкосновения профилей всегда будет проходить через полюс зацепления P .

Этим обеспечивается *постоянство передаточного числа*, даже если центровка колес слегка нарушена – основное достоинство эвольвентного профиля.

Пространственные зубчатые механизмы

Цилиндрические зубчатые механизмы имеют параллельное расположение валов (осей). Поэтому их принято называть *плоскими механизмами*. На практике очень часто бывает необходимо обеспечить передачу вращательного движения между валами, расположенными под произвольным углом. Для этого используют *пространственные зубчатые механизмы*.

К таким механизмам относятся *конические, винтовые, гипоидные и червячные* передачи.

Конические зубчатые колеса обычно применяют в передачах между валами, оси которых пересекаются под углом 90° (рисунок 4.2). В этом случае поверхность колеса образует усеченный конус.

Недостаток конических передач – наличие осевых усилий и чувствительность к точности монтажа.

Если оси звеньев перекрещиваются в пространстве, используются гипоидные, винтовые и червячные передачи.

В *гипоидной передаче* колеса представляют собой части гиперболоида вращения (усеченные конусы). При этом для пары колес выбирается участок гиперболоида с одинаковой кривизной.

Винтовая передача осуществляется цилиндрическими косозубыми колесами, оси которых перекрещиваются (рисунок 4.3). Точечный контакт и наличие скольжения приводят к быстрому износу.

Поэтому она применяется в основном в кинематических цепях приборов.

Наиболее часто встречается **червячная передача**, которая также относится к передачам с осями валов, перекрещивающимися под углом 90° .

Движение в червячных передачах осуществляется по принципу винтовой пары. Ведущее колесо имеет форму винта и называется **червяком**. Ведомое колесо называется **червячным колесом**.

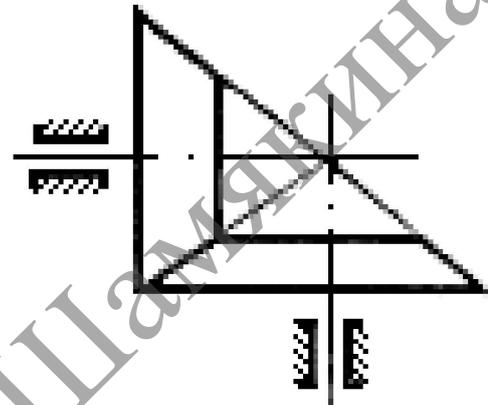


Рисунок 4.2 –
Коническая передача

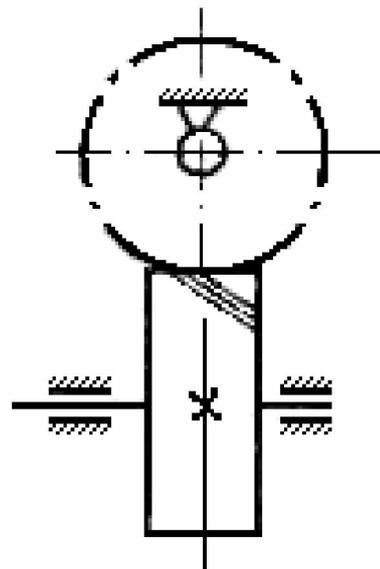


Рисунок 4.3 –
Винтовая передача

На рисунке 4.4 обозначены основные параметры червяка:

$$d_1 = mq,$$

где d_1 – делительный (начальный) диаметр червяка;
 q – коэффициент диаметра червяка,
 m – осевой модуль.

$$d_{a_1} = d_1 + 2ha,$$

где d_{a_1} – диаметр вершин.

$$d_{f_1} = d_1 - 2hf,$$

где d_{f_1} – диаметр впадин.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{pz_1}{\pi d_1},$$

где z_1 – число заходов червяка: число зубьев, на которое продвигается червяк за время одного полного оборота;
 γ – угол подъема винтовой линии.

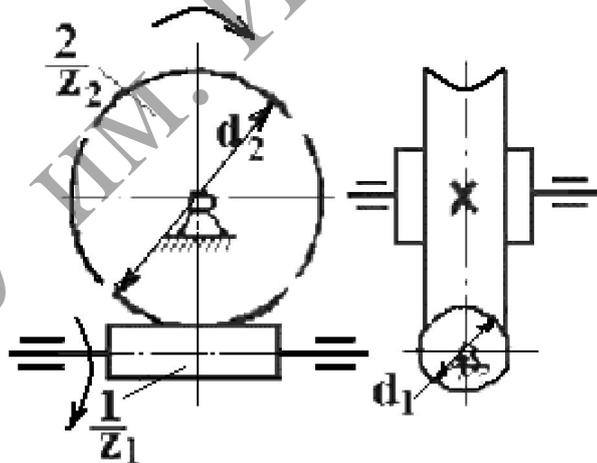


Рисунок 4.4 – Основные параметры червячной передачи

Передаточное отношение, передаточное число

При кинематическом исследовании вращающихся звеньев любого механизма, в том числе зубчатого, удобно пользоваться такими понятиями, как передаточное отношение и передаточное число.

Передаточным отношением называют отношение угловых скоростей двух вращающихся звеньев.

Для зубчатого механизма (рисунок 4.5) передаточное отношение можно записать двумя разными способами, а именно: $U_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$; $U_{21} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Индекс «12» при U указывает на то, что передача движения происходит от первого колеса ко второму.

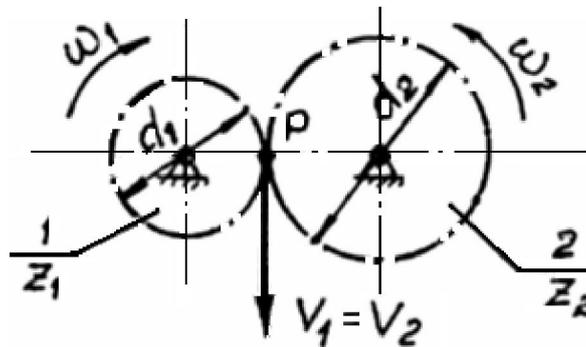


Рисунок 4.5 – Схема зубчатого зацепления

Кинематической характеристикой любого передаточного механизма служит *передаточное число*.

Передаточным числом называется передаточное отношение в направлении силового потока.

Следовательно, если первое звено ведущее (рисунок 4.6), а второе ведомое, то передаточное число

$$U_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (4.9)$$

Таким образом, **передаточное число** – отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена.

Рассмотрим более полные выражения для передаточного числа зубчатого механизма. Линейные скорости в полюсе зацепления равны между собой, т. е. $V_1 = V_2$.

Учитывая, что
$$V_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2}; \quad V_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2},$$

получаем:
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Диаметры делительных окружностей зубчатых колес выражаются через модуль зацепления следующим образом: $d_1 = mz_1$; $d_2 = mz_2$.

Тогда для передаточного числа получаем:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.10)$$

Передаточное число считается положительным, если направления вращения ведущего и ведомого звеньев совпадают (внутреннее зацепление, рисунок 4.6, а), в противном случае считается отрицательным (внешнее зацепление, рисунок 4.6, б).

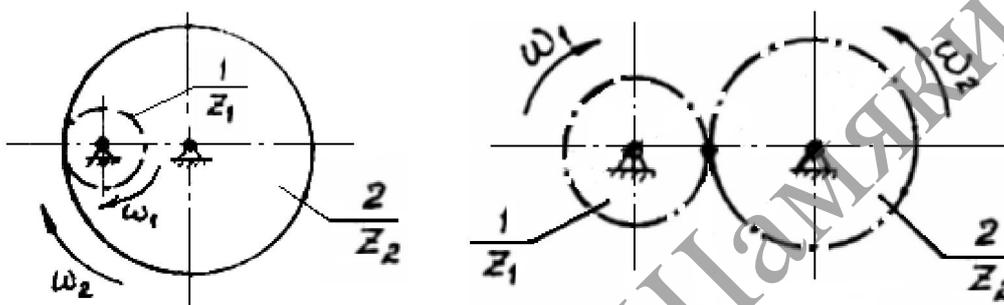


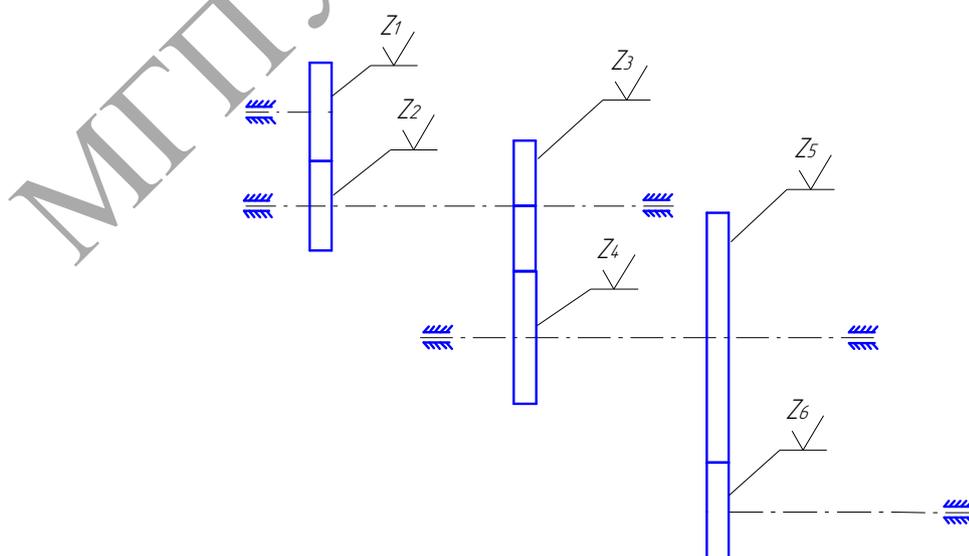
Рисунок 4.6 – Примеры зубчатых зацеплений

Кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями

Зубчатые механизмы с неподвижными осями делятся на ступенчатые передачи и рядовые передачи (зубчатый ряд).

Ступенчатые передачи

Особенности таких механизмов состоят в том, что на ведущем и ведомом валах закреплено по одному колесу, а на всех остальных – по два.



Данный зубчатый механизм состоит из трех ступеней. Первая ступень – колеса 1 и 2, вторая – колеса 3 и 4, третья – колеса 5 и 6.

Общее передаточное число U_{16} , выраженное через угловые скорости, будет равно:

$$UU_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6}.$$

Найдем передаточные числа каждой ступени, выраженные через угловые скорости и число зубьев. При этом учитываем, что пары колес 2–3 и 4–5 закреплены на одном валу и имеют соответственно одинаковые угловые скорости: $\omega_2 = \omega_3$; $\omega_4 = \omega_5$.

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad U_{23} = 1; \quad U_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3};$$

$$U_{45} = 1; \quad U_{56} = \frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Перемножая полученные величины U_{12} , U_{23} , U_{34} , получим:

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = -\frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5}.$$

В общем случае получаем:

$$U_{об} = U_{12} U_{23} U_{34} \dots U_{(n-1)n} = (-1)^k \frac{z_2 z_4 z_6 \dots z_n}{z_1 z_3 z_5 \dots z_{n-1}}, \quad (4.11)$$

где k – число внешних зацеплений.

Следовательно, общее передаточное число ступенчатого механизма равно произведению передаточных чисел отдельных ступеней. Знак общего передаточного числа зависит от количества внешних зацеплений: четное число внешних зацеплений соответствует знаку «плюс», нечетное – знаку «минус».

Ступенчатые механизмы широко применяются в редукторах, мультипликаторах, коробках передач.

Рядовые передачи

Рядовые механизмы можно рассматривать как частный случай ступенчатых механизмов, в которых на каждой оси насажено по одному

колесу (рисунок 4.7). Очевидно, что $U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$.

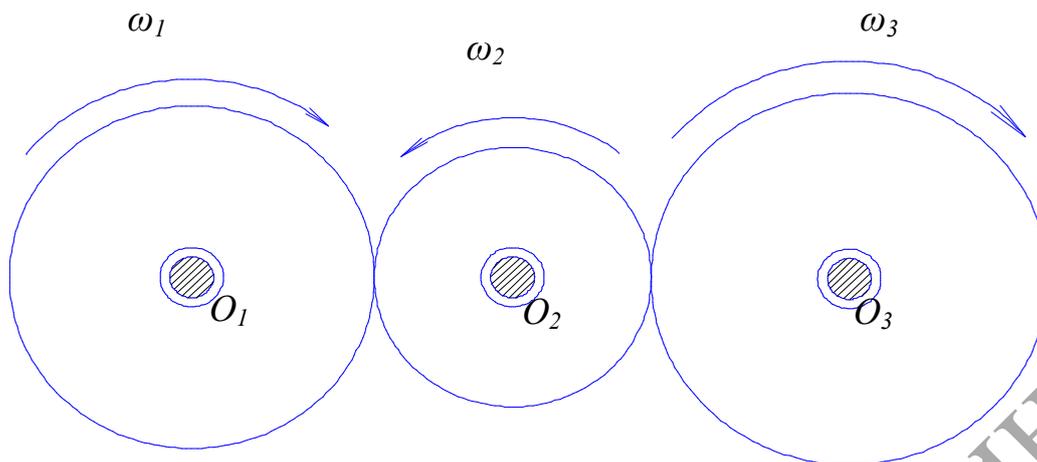


Рисунок 4.7 – Рядовая передача

Найдем передаточное число для каждой пары колес:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad U_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}.$$

Перемножая эти величины, получим:

$$U_{12}U_{23} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2\omega_3} = \frac{z_2z_3}{z_1z_2}, \quad \text{откуда} \quad U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_1}.$$

В общем случае при зацеплении n колес:

$$U_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}; \quad (4.12)$$

где k – число внешних зацеплений;

z_n – число зубьев последнего колеса;

z_1 – число зубьев первого колеса.

Как видно из формулы 4.12, число зубьев промежуточных колес не влияет на передаточное число. Но эти колеса расходуют мощность на трение. Поэтому промежуточные колеса условно называют **паразитными**. Однако они не являются бесполезными, т. к. дают возможность получить нужное направление движения ведомого звена, а также увеличить общее межосевое расстояние при меньших габаритных размерах установки.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: для пары зубчатых колес внешнего зацепления заданы: межосевое расстояние $A = 132$ мм, передаточное отношение $i_{1,2} = 2,3$ и модуль зацепления $m = 4$. Найти числа зубьев обоих колес.

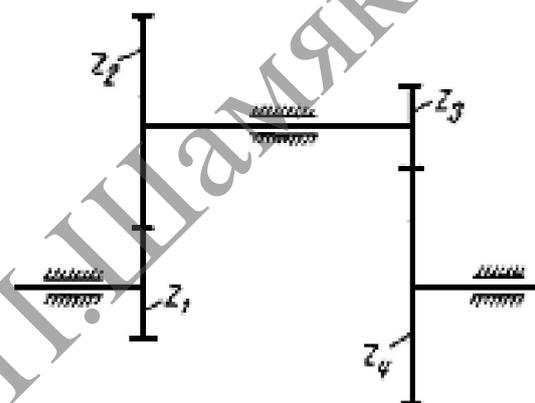
Ответ: $z_1 = 20, z_2 = 46$.

Задание 2: вращение от ведущего вала к ведомому передается при помощи трех зубчатых колес, из которых среднее является промежуточным. Оси всех колес расположены на одной прямой. Передаточное отношение этого зубчатого ряда $i_{1,3} = 5$, межосевые расстояния $A_{1,2} = 202,5$ мм, $A_{1,3} = 595$ мм, модули зацепления $m = 5$. Найти числа зубьев всех колес.

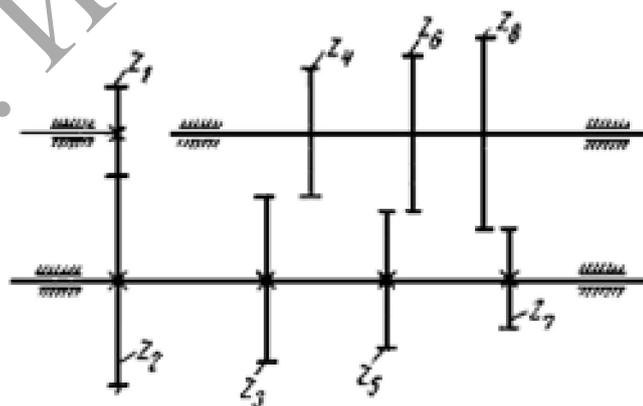
Ответ: $z_1 = 19, z_2 = 62, z_3 = 95$.

Задание 3: определить передаточное отношение $i_{1,4}$ зубчатого ряда, изображенного на рисунке по следующим данным: $z_1 = 20, z_2 = 40, z_3 = 15$ и $z_4 = 45$.

Ответ: $z_{1,4} = 6$.



Задание 4: коробка передач с тремя подвижными колесами (z_4, z_6 и z_8) предназначена для получения трех различных передаточных отношений: $i_{1,4}, i_{1,6}$ и $i_{1,8}$. Числа зубьев всех колес равны: $z_1 = 18; z_2 = 42; z_3 = 34; z_4 = 26; z_5 = 28; z_6 = 32; z_7 = 19; z_8 = 41$.



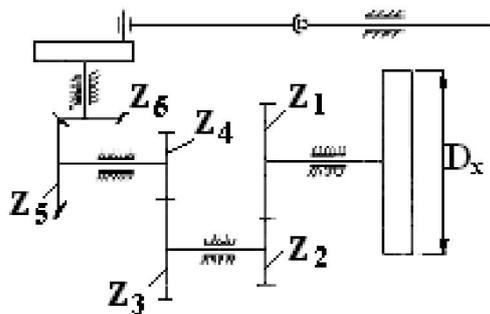
Определить передаточные отношения, которые можно получить при помощи этой коробки передач.

Ответ: $i_{1,4} = 1,784; i_{1,6} = 2,667$ и $i_{1,8} = 5,035$.

Задание 5: коробка передач с тремя подвижными колесами ($z_4; z_6$ и z_8) предназначена для получения следующих передаточных отношений: $i_{1,4} = 1,53; i_{1,6} = 2,8; i_{1,8} = 4,316$. Модуль всех колес $m = 6$ мм; межосевое расстояние $A = 180$ мм, $z_1 = 20, z_2 = 40$.

Найти число зубьев $z_3; z_4; z_5; z_6; z_7$ и z_8 .

Ответ: $z_3 = 34; z_4 = 26; z_5 = 25; z_6 = 35; z_7 = 19; z_8 = 41$.



Задание 6: на рисунке изображена кинематическая схема передачи от ходового колеса к кривошипному валу косилки. Диаметр ходового колеса $D_x = 840$ мм. Косилка движется со скоростью $v_k = 5,4$ км/ч. Определить число оборотов в минуту n_6 кривошипного вала, если зубчатые колеса имеют следующие числа зубьев: $z_1 = 30$; $z_2 = 18$; $z_3 = 27$; $z_4 = 18$; $z_5 = 25$ и $z_6 = 15$.

Ответ: $n_6 = 142$ об/мин.

Эпициклические механизмы

Зубчатые механизмы с подвижными осями некоторых зубчатых колес называются *эпициклическими механизмами*.

Всякий эпициклический механизм состоит как минимум из трех звеньев (рисунок 4.8):

- 1) солнечное (центральное) колесо;
- 2) сателлит;
- 3) водило.

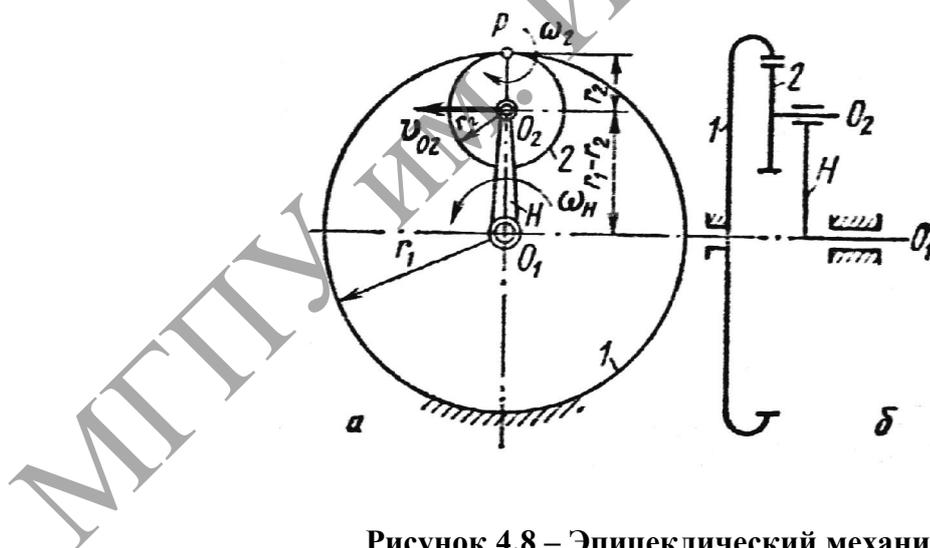


Рисунок 4.8 – Эпициклический механизм

Солнечным (центральным) колесом называется такое колесо, которое имеет неподвижную геометрическую ось.

Если солнечное колесо неподвижно, оно называется *опорным*.

Сателлит – это зубчатое колесо, имеющее подвижную ось.

Звено (рычаг), соединяющее ось сателлита с центральной осью механизма, называется *водилом*.

В механизме на рисунке 4.8 колеса z_1 и z_2 являются солнечными колесами; колесо z_2 , совершающее сложное вращательное движение (вращается вокруг центральной оси механизма с угловой скоростью ω_H и вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_2), является сателлитом; звено H – водилом.

По степени подвижности эпициклические механизмы делятся на два типа:

- **планетарные механизмы**, имеющие степень подвижности, равную единице ($W = 1$);

- **дифференциальные механизмы**, имеющие степень подвижности, равную двум ($W = 2$).

Назначение планетарных механизмов. Планетарные механизмы имеют степень подвижности, равную единице, поэтому они представляют собой в этом смысле обычные зубчатые механизмы с одним ведущим и одним ведомым звеном. Планетарные механизмы могут воспроизводить очень большие (или очень малые) передаточные отношения при малых габаритах и малом количестве зубчатых колес.

Назначение планетарных механизмов – создавать большие (или малые) передаточные отношения (планетарный редуктор).

Назначение дифференциальных механизмов. Дифференциальные механизмы (и их теория) стали известны с появлением планетарных механизмов.

Но так как у дифференциальных механизмов степень подвижности не равна единице (т. е. при одном ведущем звене они обладают неопределенностью движений), то для них не могли ввести понятия передаточного отношения, и долгое время считалось, что они вообще никогда не найдут практического применения.

Назначение дифференциальных механизмов – сложение и разложение движений. Например, ДМ используется для распределения вращающего момента между ведущими полуосями автомобиля и обеспечения вращения ведущих колес с разной скоростью (при повороте).

Следует отметить, что любой дифференциальный механизм может быть превращен в планетарный, и наоборот. Для этого конструктивно или путем силового воздействия ограничивают подвижность солнечного колеса или (если оно неподвижно) придают ему вращение.

Дифференциальные механизмы

На рисунке 4.9 представлен дифференциальный механизм, имеющий два солнечных колеса z_3 и z_1 , сателлит z_2 и водило H .

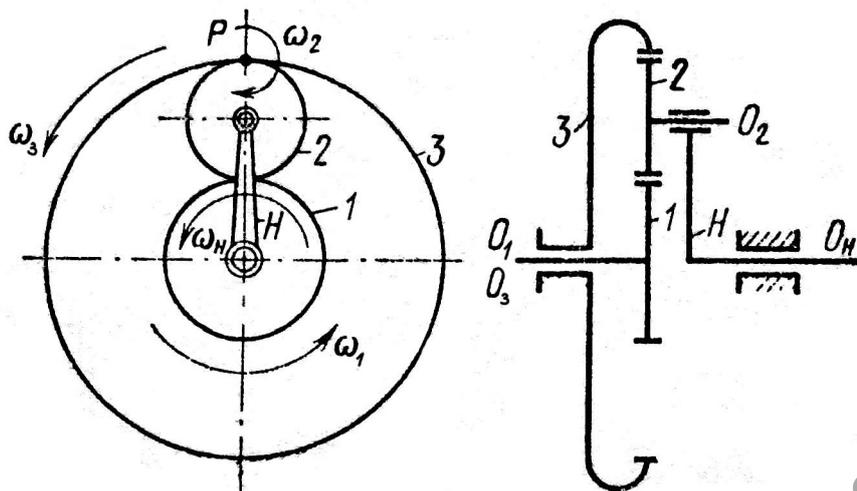


Рисунок 4.9 – Пример дифференциального механизма

Степень подвижности механизма можно определить по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \times 4 - 2 \times 4 = 2.$$

При кинематическом исследовании дифференциальных механизмов применяется несколько методов.

Рассмотрим *аналитический метод*, основанный на *принципе обращенного движения*, который заключается в следующем. Всему механизму придается угловая скорость, равная угловой скорости водила, но противоположного направления. В этом случае водило останавливается, и мы получаем зубчатый механизм с неподвижными осями.

Запишем это в табличной форме (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Преобразование скорости при обращенном движении

Звено	Начальная скорость	Скорость после обращения движения
1 (z_1)	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2 (z_2)	ω_2	$\omega_2 - \omega_H$
3 (z_3)	ω_3	$\omega_3 - \omega_H$
4 (z_4)	ω_H	$\omega_H - \omega_H = 0$

Колесо 1 будет при этом ведущим, колесо 3 – ведомым. Передаточное отношение для такого зубчатого ряда U_{13}^H может быть рассчитано уже известным способом через геометрические параметры колес (числа зубьев или диаметры). Верхний индекс H означает, что мы рассматриваем движение в предположении, что водило H неподвижно.

С другой стороны, из приведенных в таблице 4.1 соотношений получаем:

$$U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (4.13)$$

Эта формула получила название *формулы Виллиса*. Она применима как для дифференциальных, так и для планетарных механизмов.

Практическое применение формулы Виллиса: дополнительное уравнение, позволяющее рассчитать скорость вращения одного из колес или водила при известных остальных скоростях и геометрических параметрах колес.

Планетарные механизмы

Рассмотренный дифференциальный механизм при остановке любого из солнечных колес становится планетарным.

Остановим колесо z_3 (т. е. $\omega_3 = 0$) – рисунок 4.10.

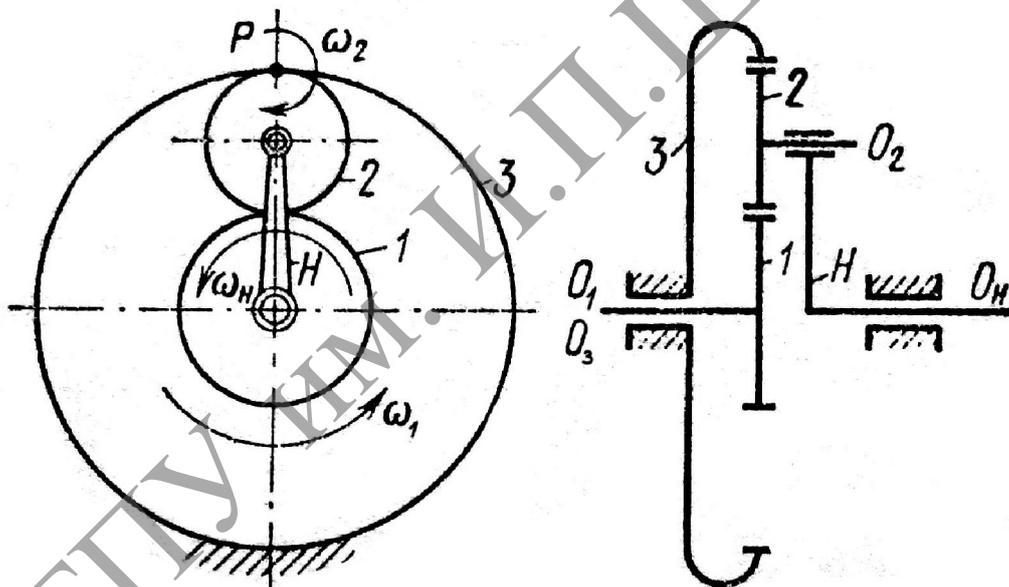


Рисунок 4.10 – Пример планетарного механизма

Тогда степень подвижности механизма будет равна:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \times 3 - 2 \times 3 = 1.$$

Передаточное число планетарного механизма – отношение угловых скоростей водила H и ведомого звена I – U_{H1} . Его можно получить из формулы Виллиса (4.1) при $\omega_3 = 0$:

$$U_{13}^H = -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1, \quad \text{где} \quad \frac{\omega_1}{\omega_H} = U_{1H},$$

следовательно,
$$U_{1H} = 1 - U_{13}^H. \quad (4.14)$$

U_{13}^H – передаточное отношение зубчатого ряда, определяем через геометрические параметры колес. (В нашем случае $U_{13}^B = -\frac{z_3}{z_1}$).

Искомое передаточное отношение:

$$U_{H1} = \frac{1}{U_{1H}} = \frac{1}{1 - U_{13}^H}.$$

В общем случае для n колес:

$$U_{1H} = 1 - U_{1n}^H, \quad (4.15)$$

где U_{1n}^H – общее передаточное число от первого (ведущего) колеса к последнему в обратном движении.

Передаточное число от водила к первому колесу – величина, обратная (4.15):

$$U_{H1} = \frac{1}{U_{1H}} = \frac{1}{1 - U_{1n}^H}. \quad (4.16)$$

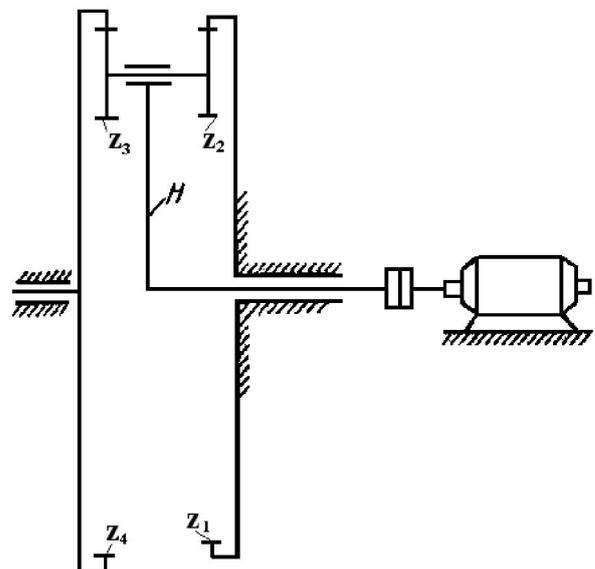
Таким образом, малым значениям передаточного числа зубчатого ряда ($U_{1n}^H \approx 1$) соответствуют большие передаточные числа от водила к первому звену. Теоретически при $U_{1n}^H = 1$ получаем $U_{H1} \rightarrow \infty$.

Примеры решения задач

Пример 1: определить передаточное отношение U_{H4} , планетарного механизма, изображенного на рисунке, по следующим данным: $z_1 = 85$; $z_2 = 15$; $z_3 = 21$, $z_4 = 91$.

Решение: по формуле Виллиса

$$i_{1,4}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H},$$



определяем передаточное отношение зубчатого ряда

$$i_{1,4}^H = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{15 \cdot 91}{85 \cdot 21} = \frac{13}{17}.$$

$$i_{1,4}^H = \frac{n_H}{n_4}$$

Чтобы найти передаточное отношение числитель, и знаменатель правой части формулы Виллиса на знаменатель искомого передаточного отношения (т. е. на n_4), получим:

$$i_{1,4}^H = \frac{0 - i_{H,4}}{1 - i_{H,4}}.$$

Решая полученное уравнение относительно $i_{H,4}$ определяем

$$i_{1,4}^H = \frac{i_{1,4}^H}{i_{1,4}^H - 1} = -\frac{13}{4}.$$

Пример 2: в планетарном редукторе известны числа зубьев всех зубчатых колес: $z_1 = 44$; $z_2 = 74$; $z_3 = 14$; $z_4 = 44$; $z_5 = 16$; $z_6 = 42$. Ведущее колесо z_1 вращается со скоростью $n_1 = 1800$ об/мин. Определить число оборотов n_6 ведомого звена.

Решение: данный планетарный редуктор состоит из двух частей: планетарного механизма, в состав которого входят зубчатые колеса z_1, z_2, z_3, z_4 и водило H , и зубчатой передачи, состоящей из колес z_5 и z_6 .

Сначала находим число оборотов n_H водила в планетарном механизме по формуле Виллиса:

$$i_{1,4}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H}$$

Определяем передаточное отношение зубчатого ряда (при остановленном водиле):

$$i_{1,4}^H = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{75 \cdot 44}{44 \cdot 14} = \frac{37}{7}.$$

Подставляем в формулу Виллиса известные величина:

$$\frac{37}{7} = \frac{1800 - n_H}{0 - n_H},$$

откуда

$$n_H = 420 \text{ об/мин.}$$

Зубчатое колесо z_5 жестко соединено с водилом, следовательно, $n_5 = n_H = 420$ об/мин.

Рассматривая зубчатую передачу z_5, z_6 , определяем передаточное отношение:

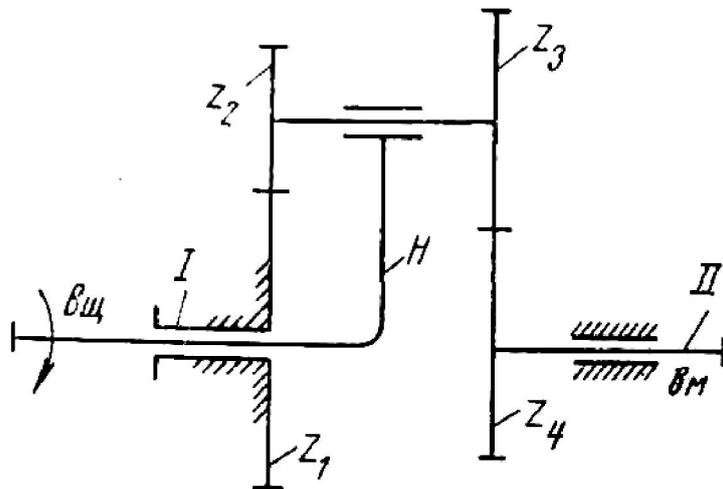
$$i = \frac{z_6}{z_5} = -\frac{42}{16} = -\frac{21}{8}.$$

Следовательно, число оборотов ведомого вала

$$n_6 = \frac{n_5}{i_{5,6}} = \frac{-420}{-\frac{21}{8}} = 160 \text{ об/мин.}$$

Пример 3: для дифференциального механизма, изображенного на рисунке, даны числа зубьев: $z_1 = 80$; $z_2 = 20$; $z_3 = 25$; $z_4 = 35$ и числа оборотов $n_1 = 600$ об/мин и $n_4 = -300$ об/мин. Требуется определить число оборотов n_H водила.

Решение: формула Виллиса для данного случая запишется так:



$$i_{1,4}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H}.$$

Определяем передаточное отношение зубчатого ряда:

$$i_{1,4}^H = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = -\frac{20 \cdot 35}{80 \cdot 25} = -\frac{7}{20}.$$

Подставляем в формулу Виллиса известные величины:

$$-\frac{7}{20} = \frac{600 - n_H}{-300 - n_H},$$

откуда

$$n_H = 367 \text{ об/мин.}$$

Пример 4: определить передаточное отношение $i_{H,4}$ планетарного механизма, если известны числа зубьев: $z_1 = 40$; $z_2 = 20$; $z_3 = 35$; $z_4 = 25$.

Решение: определяем передаточное отношение зубчатого ряда:

$$i_{1,4}^H = i_{3,p} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{20 \cdot 25}{40 \cdot 35} = \frac{5}{14}.$$

Передаточное отношение планетарного механизма рассчитаем по формуле:

$$i_{H,4} = \frac{i_{3,p}}{i_{3,p} - 1} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{14} - 1} = -\frac{5}{9}.$$

Решим теперь эту же задачу, применяя формулу, которая справедлива для случая, когда водило является ведомым. Временно поменяем ведущее и ведомое звенья (т. е. ведущим сделаем z_4 , а ведомым – водило), тогда

$$i_{4,1}^H = 1 - i_{4,1}^H = 1 - \frac{14}{5} = \frac{9}{5},$$

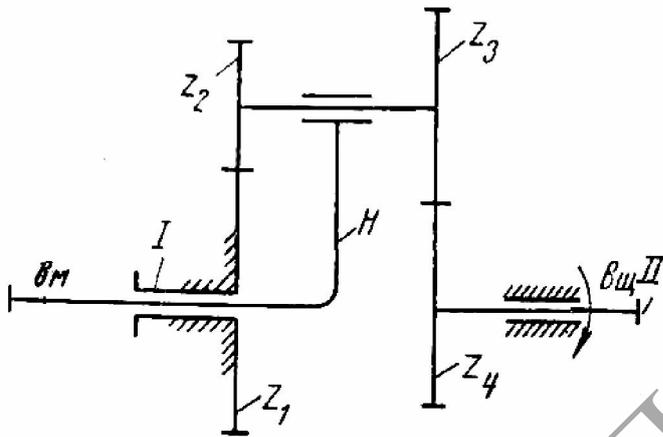
где

$$i_{4,1}^H = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} = \frac{40 \cdot 35}{20 \cdot 25} = \frac{14}{5}.$$

Искомое передаточное отношение $i_{H,4}$ будет равно

$$i_{H,4} = \frac{1}{i_{4,H}} = \frac{1}{-\frac{9}{5}} = -\frac{5}{9}.$$

Пример 5: определить передаточное отношение планетарного механизма, изображенного на рисунке (числа зубьев те же, что и в предыдущем примере).



Решение: передаточное отношение планетарного механизма определяем по формуле:

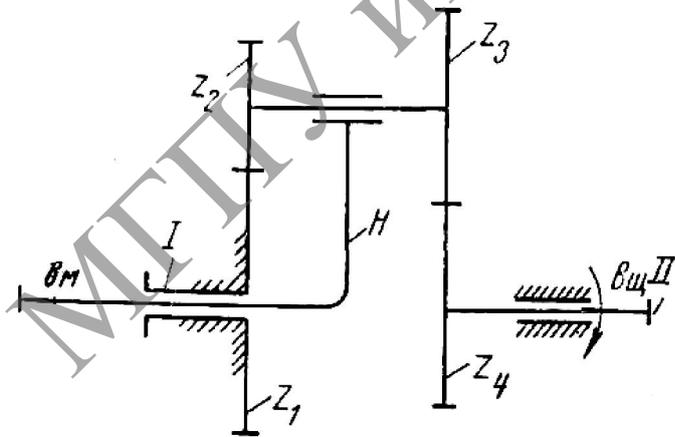
$$i_{nl} = \frac{i_{3,p} - 1}{i_{3,p}} = \frac{\frac{5}{14} - 1}{\frac{5}{14}} = -\frac{9}{5},$$

где

$$i_{3,p} = i_{4,1}^H = \frac{5}{14}.$$

Теперь подсчитаем это же передаточное отношение по формуле:

$$i_{nl} = i_{4,H}^I = 1 - \frac{14}{5} = 1 - \frac{14}{5} = -\frac{9}{5}.$$



Пример 6: определить передаточное отношение $i_{H,1}$ планетарного механизма, изображенного на рисунке (числа зубьев те же).

Решение: передаточное отношение планетарного механизма находим по формуле:

$$i_{nl} = i_{H,1} = \frac{1}{1 - i_{3,p}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{14}} = \frac{14}{9},$$

где

$$i_{3,p} = i_{1,4}^H = \frac{5}{14}.$$

Это же передаточное отношение по формуле равно

$$i_{H,1} = 1 - i_{3,p} = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14},$$

где

$$i_{3,p} = i_{1,4}^H = \frac{5}{14}.$$

Искомое передаточное отношение

$$i_{nl} = i_{H,1} = \frac{1}{i_{1,H}} = \frac{1}{\frac{9}{14}} = \frac{14}{9}.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: в дифференциальном механизме банкоброша (рисунок 4.11, а) дано: $z_1 = 15$; $z_2 = 80$; $z_3 = 60$; $z_4 = 50$; $z_5 = 40$; $z_6 = 30$; $z_7 = 40$; $z_8 = 25$; $n_1 = 100$ об/мин и $n_3 = 400$ об/мин. Определить число оборотов n_8 ведомого колеса и сателлитов n_4 .

Ответ: $n_8 = 630,75$ об/мин; $n_4 = 483,75$ об/мин.

Задание 2: в планетарном редукторе (рисунок 4.11, б) даны числа зубьев: $z_1 = 58$; $z_2 = 25$; $z_3 = 33$; $z_4 = 66$; $z_5 = 15$; $z_6 = 45$ и число оборотов водила $n_H = 1\,500$ об/мин.

Определить число оборотов n_6 ведомого колеса и число оборотов n_2 сателлитов.

Ответ: $n_6 = 20$ об/мин; $n_2 = -1\,980$ об/мин.

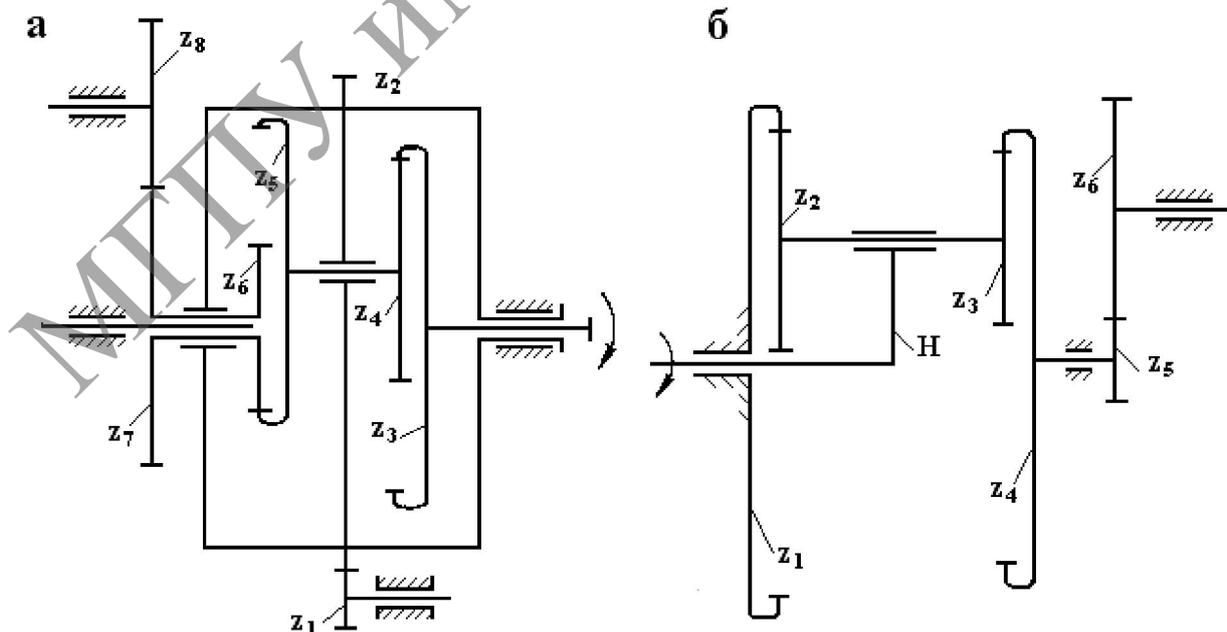


Рисунок 4.11 – Примеры эпициклических механизмов

Задание 3: в планетарном механизме (рисунок 4.12, а) даны числа зубьев $z_1 = z_4 = z_7 = 20$; $z_2 = 22$; $z_3 = 64$; $z_5 = 24$; $z_6 = 68$; $z_8 = 26$; $z_9 = 72$; число оборотов ведущего вала $n_1 = 850$ об/мин.

Определить число оборотов $n_{H,3}$ ведомого вала.

Ответ: $n_{H,3} = 10$ об/мин.

Задание 4: определить передаточное отношение $i_{1,6}$ планетарного механизма по следующим данным: $z_1 = 70$; $z_2 = 20$; $z_3 = 25$; $z_4 = 75$.

Ответ: $i_{1,6} = -6$.

Задание 5: определить передаточное отношение планетарного редуктора (рисунок 4.12, б) по следующим данным: $z_1 = 21$; $z_2 = 42$; $z_3 = 15$; $z_4 = 36$; $z_5 = 19$; $z_6 = 45$.

Ответ: $i_{1,6} = 9$.

Задание 6: определить передаточное отношение $i_{1,H}$ планетарного редуктора (рисунок 4.12, в) по следующим данным: $z_1 = 20$; $z_2 = 36$; $z_3 = 18$; $z_4 = 38$; $z_5 = 88$; $z_6 = 26$; $z_7 = 36$.

Ответ: $i_{1,H} = -\frac{589}{218} \approx -2,7$.

Задание 7: определить передаточное отношение $i_{1,7}$ планетарного редуктора (рисунок 4.12, г) по следующим данным: $z_1 = 20$; $z_2 = 40$; $z_3 = 18$; $z_4 = 78$; $z_5 = 24$; $z_6 = 28$; $z_7 = 80$.

Ответ: $i_{1,7} = -\frac{260}{117} \approx -2,22$.

Задание 8: определить передаточное отношение $i_{1,7}$ планетарного механизма полиспаста (рисунок 4.12, д) по следующим данным: $z_1 = 30$; $z_2 = 20$; $z_3 = 30$; $z_4 = 80$; $z_5 = 40$; $z_6 = 20$; $z_7 = 80$.

Ответ: $i_{1,7} = \frac{25}{3}$.

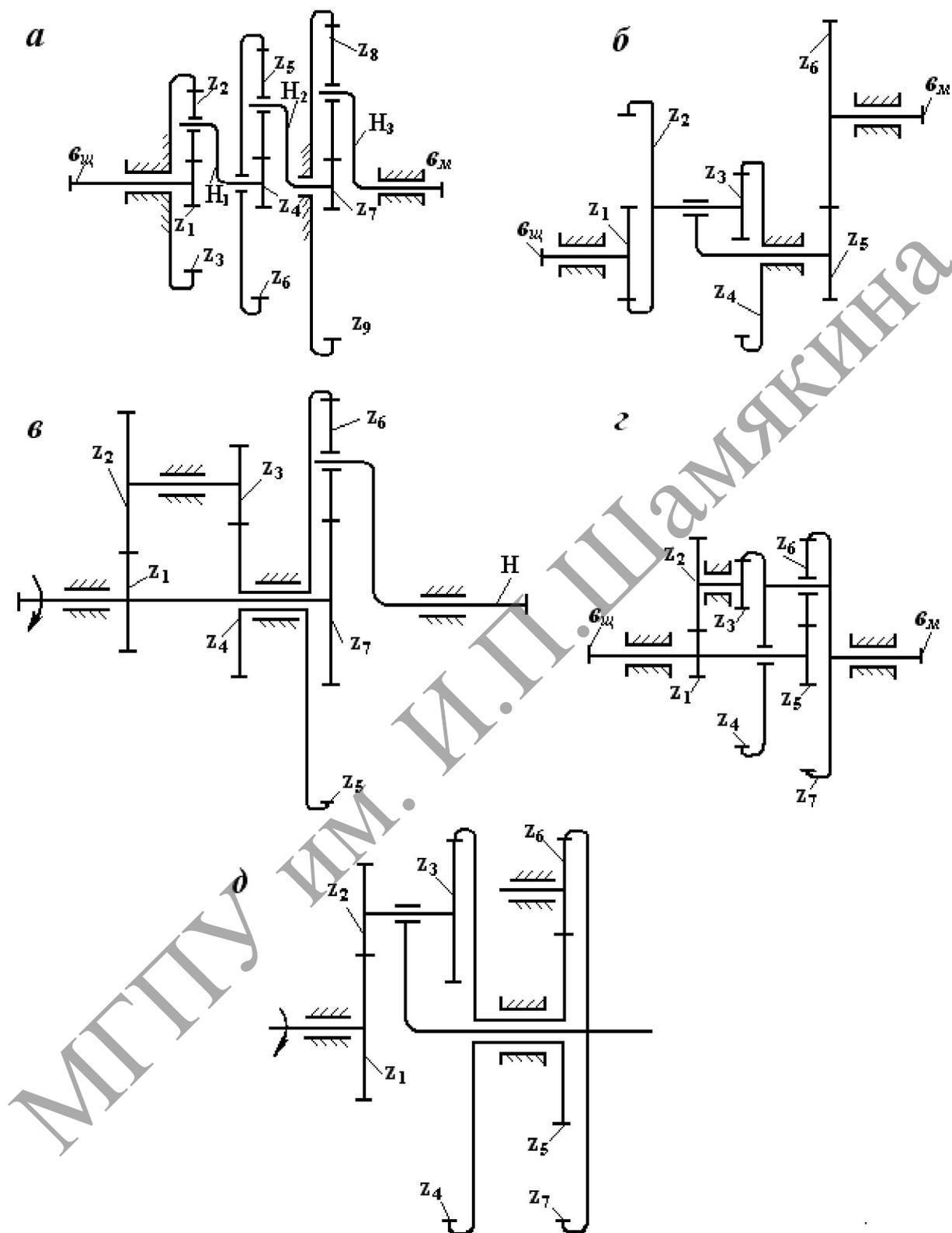


Рисунок 4.12 – Примеры планетарных механизмов

Практическая работа № 5.
ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ

Виды трения, законы трения

Сила сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы, тангенциально направленная к общей границе между этими телами, называется **силой трения**.

При сухом трении происходит большая затрата работы и износ трущихся поверхностей. Для устранения этих явлений следует применять жидкостное трение.

Поскольку сухое трение вызывает наибольшие силы сопротивления, дальнейшее изучение вопросов трения будем рассматривать для сухих тел.

Основные законы сухого трения:

1) сила трения пропорциональна нормальному давлению

$$F = fN, \quad (5.1)$$

где f – коэффициент пропорциональности, который называется **коэффициентом трения скольжения**;

N – нормальное давление;

2) коэффициент трения скольжения зависит от материала и состояния трущихся поверхностей;

3) силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительным скоростям;

4) коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения при движении;

5) с увеличением скорости движения сила трения в большинстве случаев уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению;

6) с увеличением времени предварительного контакта сила трения возрастает.

Трению движения предшествует трение покоя (зона I на рисунке 5.1), т. е. трение между телами 1 и 2 при относительном предварительном микросмещении двух тел и период перехода (зона II) от покоя к скольжению (зона III). Предварительное смещение равно расстоянию, при котором сила трения покоя возрастает от нуля до некоторого максимального значения.

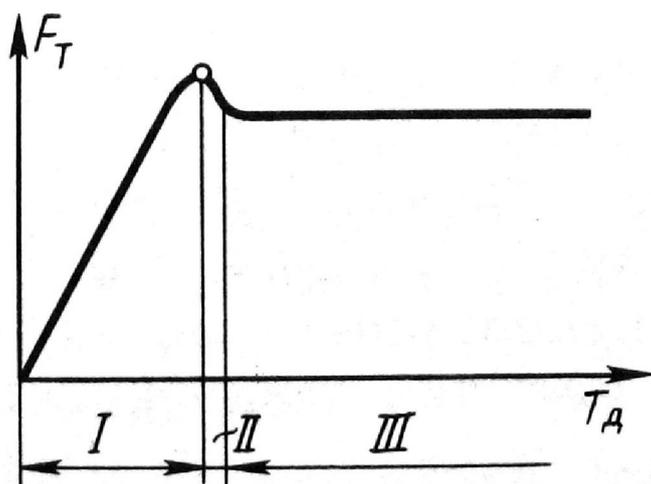


Рисунок 5.1 – Изменение силы трения со временем движения

Трение в поступательных парах

1. Трение на горизонтальной плоскости

На ползун действует горизонтальная сила P (рисунок 5.2).

Силы, действующие на ползун:

P – движущая сила;

Q – внешняя нагрузка + сила тяжести ползуна;

N – нормальная реакция опоры;

F – сила трения.

Необходимо определить требуемую величину движущей силы – $P = ?$

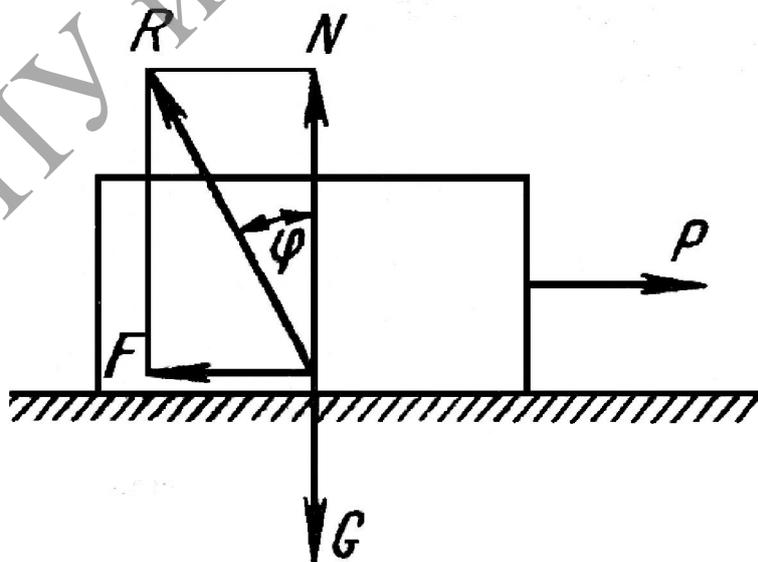


Рисунок 5.2 – Силы действующие на тело

Равнодействующая сил трения F и нормальной реакции N называется **полной реакцией** R .

$$\text{Она равна } \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}; \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{N^2 + F^2}. \quad (5.2)$$

Полная реакция отклонена от нормальной реакции на угол φ , называемый **углом трения**:

$$\operatorname{tg} \varphi = F/N, \quad (5.3)$$

т. е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Если движущая сила будет приложена в другом направлении, полная реакция тоже изменит направление, но опять составит угол φ с направлением нормальной реакции.

Совокупность возможных направлений полных реакций R образует коническую поверхность, называемую **конусом трения** (рисунок 5.3).

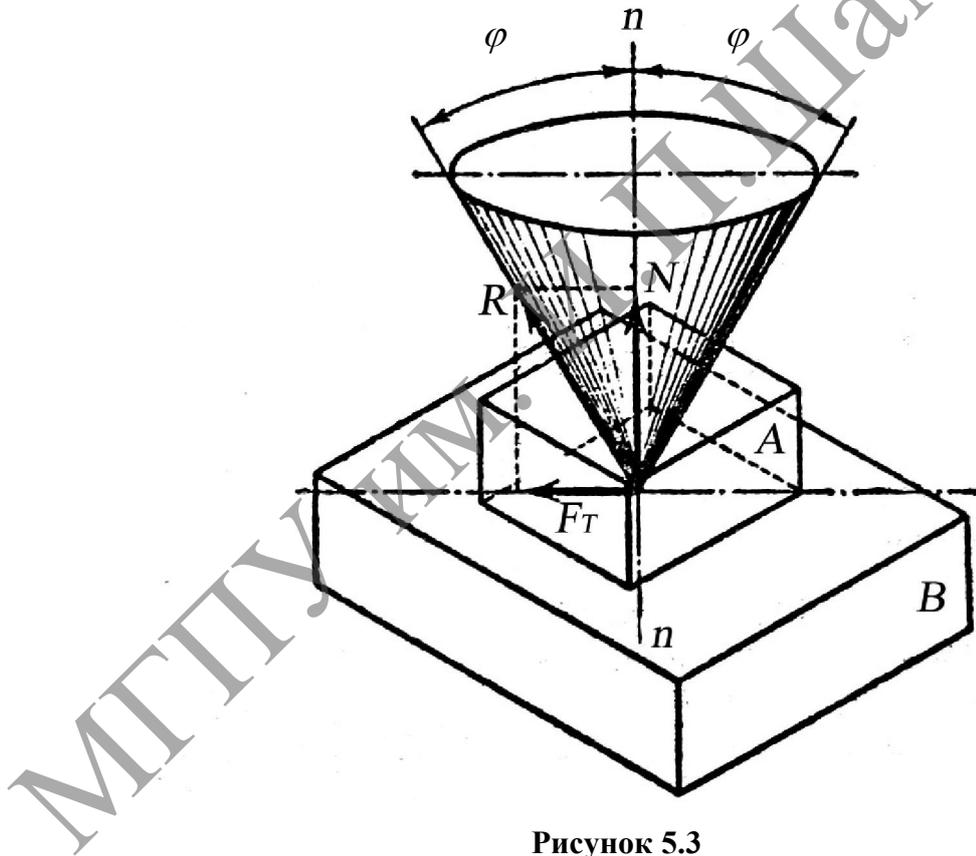


Рисунок 5.3

Для определения движущей силы P рассмотрим условие равновесия ползуна, приведенного на рисунке 5.3, заменив нормальную реакцию и силу трения полной реакцией:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{Q} = 0. \quad (5.4)$$

Построим треугольник сил (рисунок 5.4), найдем величину движущей силы:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \varphi = Q f, \quad (5.5)$$

где P – связь движущей силы с внешней нагрузкой.

Ползун на горизонтальной плоскости: движущая сила P направлена под углом α .

Перенесем силу P на трущиеся поверхности и разложим на составляющие P_1 и P_2 (рисунок 5.5).

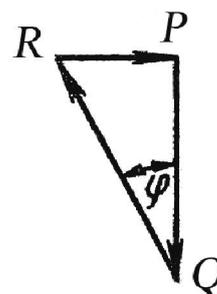


Рисунок 5.4 – Треугольник сил

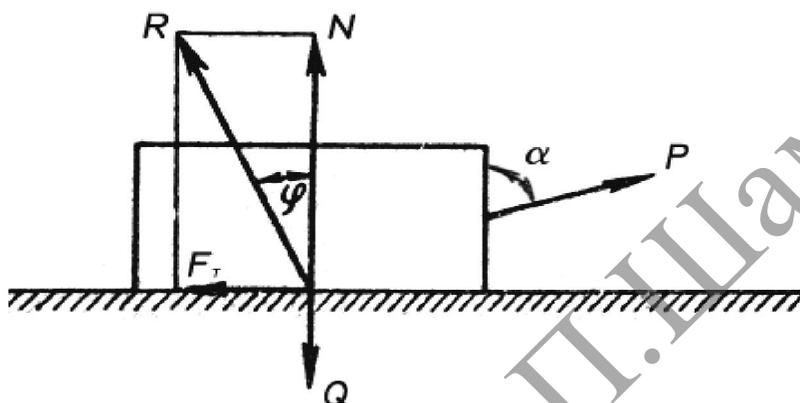


Рисунок 5.5 – Ползун на горизонтальной плоскости, действующая сила направлена под углом к горизонту

Условие движения ползуна: $P_1 \geq F$.

Согласно рисунку 5.6, имеем:

$$P_1 = P \cdot \sin \alpha; \quad P_2 = P \cdot \cos \alpha;$$

$$F = N f = P_2 f = P f \cos \alpha.$$

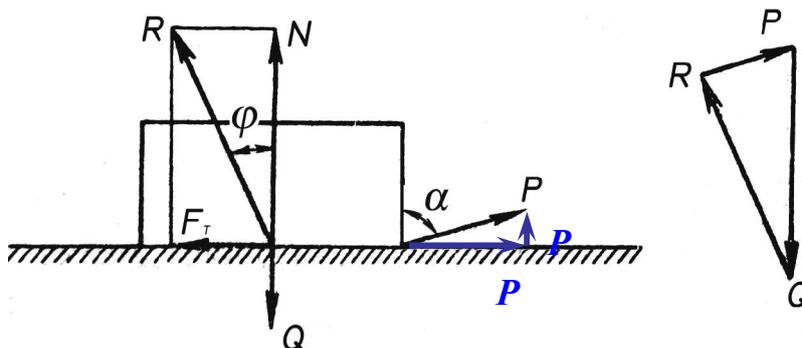


Рисунок 5.6 – К силовому расчету ползуна на горизонтальной плоскости

Отсюда получаем: $\sin \alpha \geq f \cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha \geq f$. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha \geq \operatorname{tg} \varphi$.

Так как мы рассматриваем углы до 90° , то $\alpha \geq \varphi$. Таким образом, при $\alpha < \varphi$, возникает самоторможение.

Чтобы найти величину движущей силы, строим треугольник сил и составляем уравнение равновесия: $\vec{R} + \vec{P} + \vec{Q} = 0$.

В проекциях на оси координат:

$$P \cos \alpha + R \cos \varphi = Q;$$

$$P \sin \alpha + R \sin \varphi = 0.$$

Откуда получаем:

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \varphi \sin \alpha}.$$

2. Трение на наклонной плоскости

Ползун находится на наклонной плоскости, и на него действует горизонтальная сила P (рисунок 5.7), α – угол наклона плоскости.

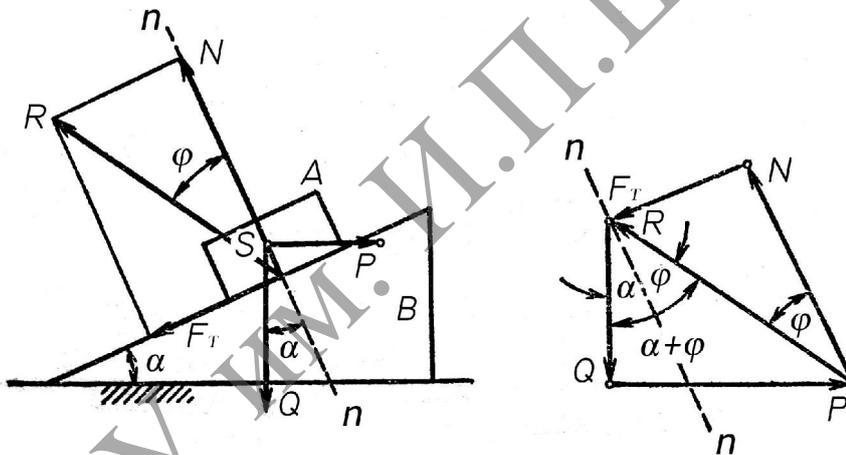


Рисунок 5.7 – Ползун на наклонной плоскости

Движущую силу P найдем из условия равновесия:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{Q} = 0.$$

Построим треугольник сил, углы которого равны:

$$\sphericalangle = \alpha + \varphi; \quad \sphericalangle = 90^\circ - (\alpha + \varphi).$$

Имеем:

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi). \quad (5.7)$$

В отличие от горизонтальной, *наклонная плоскость обладает КПД*. В данном случае полезная работа – подъем груза весом Q на высоту h :

$$A_n = Qh = Ql \sin \alpha.$$

Затраченная работа – работа движущей силы по перемещению ползуна по плоскости скольжения на расстояние l :

$$A_3 = Pl \cos \alpha = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) l \cos \alpha.$$

Откуда:
$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

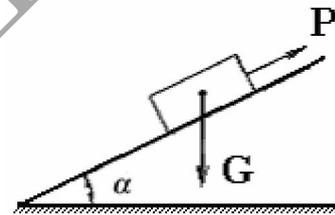
где η – КПД наклонной плоскости.

Условие самоторможения для наклонной плоскости:

$$\alpha = 90^\circ - \varphi.$$

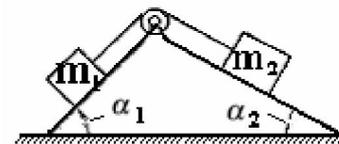
Задания для самостоятельного решения

Задание 1: тело движется вверх по наклонной плоскости под действием силы P , параллельной плоскости. Вывести формулы для определения силы P и коэффициента полезного действия η .



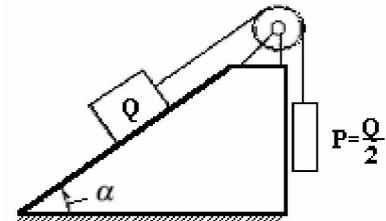
Ответ: $P = G (\sin(\alpha + \varphi) / \cos \varphi),$
 $\eta = \sin \alpha \cos \varphi / \sin(\alpha + \varphi).$

Задание 2: два груза, имеющие массы $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 40$ кг, лежат на наклонных плоскостях и соединены канатом, перекинутым через блок. Определить будет ли равновесие, если углы наклона плоскостей $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, коэффициент трения $f = 0,1$. Трением в блоке пренебречь.

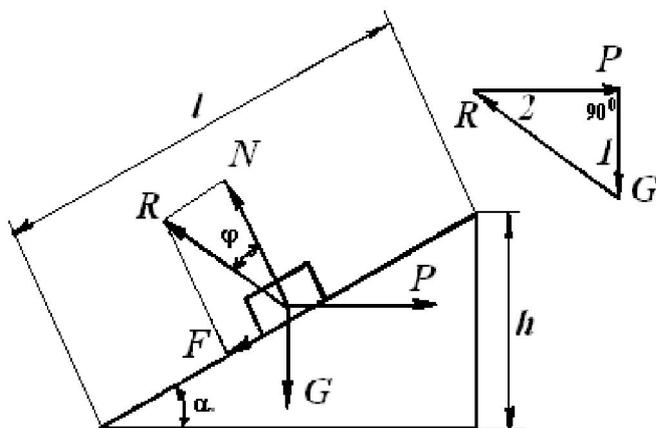


Ответ: Грузы будут двигаться в сторону меньшего из них.

Задание 3: один груз Q лежит на наклонной плоскости, второй груз $P = Q/2$, в два раза меньшей массы, висит на веревке, перекинутой через блок и соединенной с первым грузом. Определить угол наклона с α_1 плоскости, при котором груз Q будет двигаться вверх, и угол α_2 , при котором груз Q начнет сползать вниз. Коэффициент трения $f = 0,15$. Трением в блоке пренебречь.



Ответ: $\alpha_1 = 0 - 21^\circ 05'$; $\alpha_2 = 38^\circ 10'$.



Задание 4: под действием горизонтальной силы P тело G массой $m = 50$ кг движется вверх по наклонной плоскости.

Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 25^\circ$, коэффициент трения $f = 0,15$. Определить силу P и η .

Ответ: $P = 325$ Н;
 $\eta = 0,302$.

Задание 5: чугунную фундаментную плиту массой $m = 500$ кг нужно втащить на высоту $h = 1$ м по деревянному настилу длиной $l = 6$ м. Сколько понадобится для этого рабочих, если принять усилие каждого рабочего равным 400 Н, а коэффициент трения $f = 0,25$. Канат при втаскивании плиты направлен параллельно помосту. Выяснить, что произойдет в случае обрыва каната.

Ответ: потребуется пять рабочих. В случае обрыва каната плита останется лежать на месте.

Задание 6: тело под действием собственного веса движется вниз по наклонной плоскости (угол наклона плоскости к горизонту равен α) с ускорением, равным a . Определить коэффициент трения f между телом и плоскостью.

Ответ: $f = \operatorname{tg} \alpha - a/g \cos \alpha$.

3. Трение в клиньях

Разновидностью наклонной плоскости являются клиновые соединения.

Методика и порядок решения задач на клиновые соединения:

- 1) обнаруживают поверхности трения;
- 2) определяют направления сил трения на этих поверхностях;
- 3) с учетом направления сил трения наносят полные реакции;
- 4) составляют графические условия равновесия (строят замкнутые треугольники сил для каждого подвижного звена);
- 5) аналитически обрабатывают графические условия равновесия и определяют зависимость между движущей силой P и нагрузкой Q .

Для сообщения ползуну прямолинейного движения без боковых отклонений применяют клинчатые направляющие. В этом случае внешняя нагрузка Q воспринимается двумя поверхностями (рисунок 5.8).

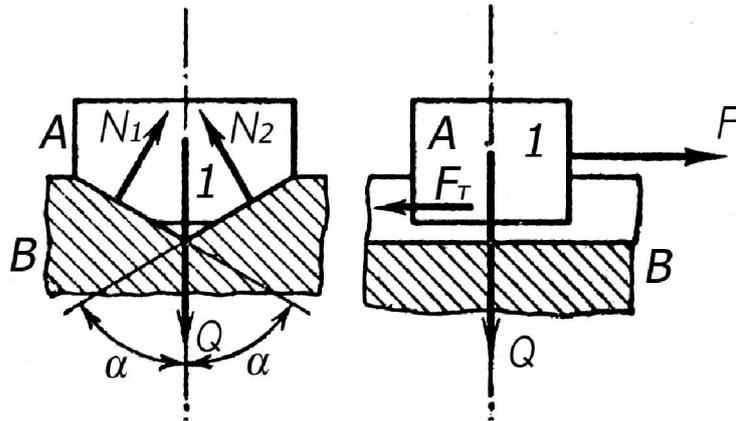


Рисунок 5.8 – Клиноватый ползун

Со стороны каждой поверхности на ползун действует нормальная сила реакции N и сила трения F ; 2α – угол заострения клиноватого ползуна.

Условие равновесия сил в направлении движения ползуна:

$$P = 2F = 2f N = 2N \operatorname{tg} \varphi.$$

Условие равновесия в вертикальной плоскости:

$$Q = 2N \sin \alpha,$$

откуда

$$P = \frac{Q f}{\sin \alpha}$$

или

$$P = f_k Q,$$

где $f_k = \frac{f}{\sin \alpha}$ – приведенный коэффициент трения клиноватого ползуна.

Очевидно, если $\alpha \neq 0$, то $f_k > f$, т. е. сила трения в клиноватом ползуне всегда больше, чем в ползуне на горизонтальной плоскости.

Примеры решения задач

Пример 1: пусть имеем клиновой пресс (рисунок 5.9, а). Клиноватый клин 1 под действием силы P перемещается влево и давит на клин 2 , который вследствие этого перемещается вверх и производит прессование материала с силой Q . Придерживаясь указанной методики, найдем зависимость между силами Q и P в клиноватом прессе.

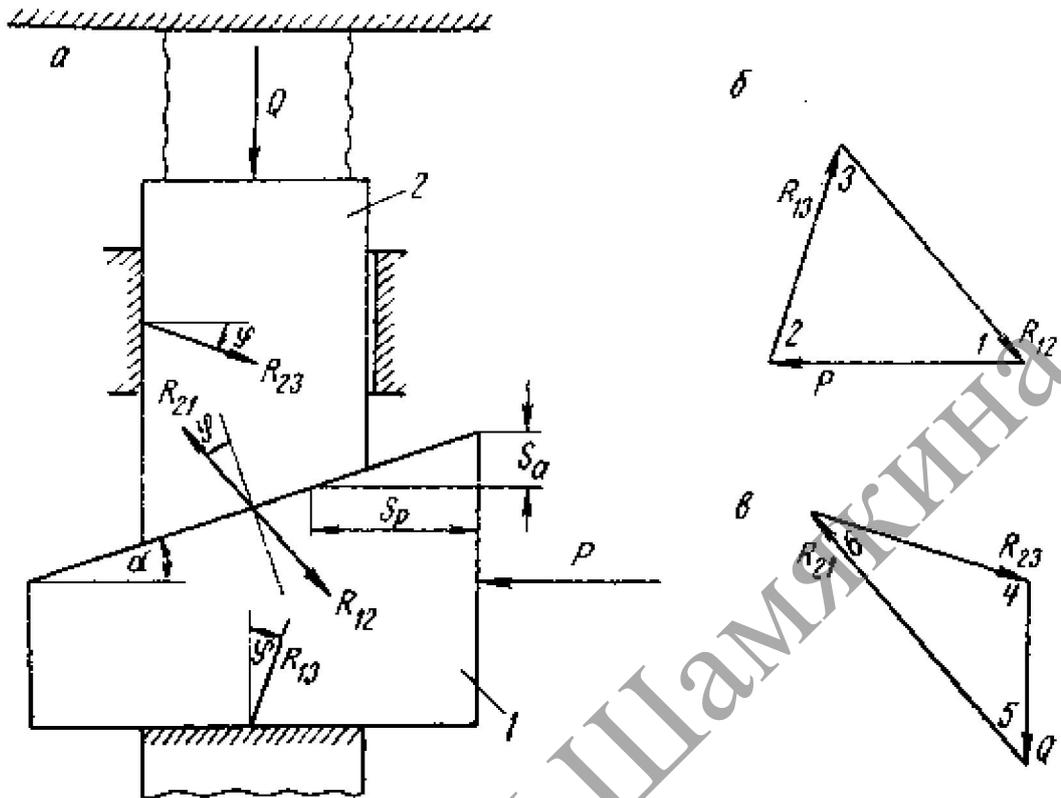


Рисунок 5.9 – Клиновой пресс

Решение: силы трения направлены в сторону, противоположную относительному движению, поэтому на клине 1 полные реакции $R_{1,3}$ и $R_{1,2}$ будут отклонены на угол φ от нормалей в сторону направления сил трения. На клин 1 действуют три силы: P , $R_{1,3}$ и R_2 . Составляем графическое условие равновесия этого клина, т. е. чертим треугольник сил (рисунок 5.9, б).

На клин 2 действуют тоже три силы: Q , $R_{2,1}$ и $R_{2,3}$. Для этого клина также строим треугольник сил (рисунок 5.9, в).

Определяем углы треугольников сил:

$$\angle 1 = 90^\circ - (\alpha + \varphi);$$

$$\angle 2 = 90^\circ - \varphi;$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = \alpha + 2\varphi;$$

$$\angle 4 = 90^\circ + \varphi;$$

$$\angle 5 = \alpha + \varphi;$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 4 + \angle 5) = 90^\circ - \alpha - 2\varphi.$$

По теореме синусов:
для первого треугольника

$$\frac{R_{1,2}}{\sin 2} = \frac{P}{\sin 3},$$

или
$$R_{1,2} = P \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin(\alpha - 2\varphi)};$$

для второго треугольника

$$\frac{R_{1,2}}{\sin 4} = \frac{Q}{\sin 6},$$

или
$$R_{2,1} = Q \frac{\sin(90^\circ + \varphi)}{\sin(90^\circ - \alpha - 2\varphi)}.$$

По третьему закону Ньютона, $R_{1,2} = R_{2,1}$, следовательно,

$$P \frac{\cos \varphi}{\sin(\alpha + 2\varphi)} = Q \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha + 2\varphi)},$$

откуда
$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi). \quad (5.8)$$

КПД этого пресса равен отношению работы A_Q силы полезного сопротивления к работе A_P движущей силы:

$$\eta = \frac{A_Q}{A_P}.$$

Когда сила P пройдет путь S_P , сила Q – путь S_Q (рисунок 5.9, а), но

$$S_Q = S_P \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно,

$$\eta = \frac{Q \cdot S_Q}{P S_P} = \frac{Q S_P \operatorname{tg} \alpha}{P S_P}.$$

Подставив в это выражение P по формуле (5.8), получим окончательно

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)}.$$

Выясним условие самоторможения этого пресса, т. е. невозможность движения клиньев в обратном направлении (клина 2 – вниз и клина 1 – направо), под действием силы Q и при отсутствии силы P .

Если в формулу (5.8) подставить угол φ со знаком «–», то полученное уравнение и будет выражать зависимость между силами Q' и P' при обратном ходе, т. е.

$$P' = Q' \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi),$$

но

$$P' = 0,$$

следовательно,

$$Q' \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = 0$, значит, $\alpha - 2\varphi = 0$ и $\alpha < 2\varphi$.

Клиновой пресс будет самотормозящим в том случае, когда угол α заострения клина будет равен или меньше двойного угла трения.

4. Трение во вращательных парах

Опорные части валов называют **цангами**.

Цанфы, расположенные на концах валов, называют **шипами**, а промежуточные – **шейками** (рисунок 5.10, а).

Части валов, которые воспринимают осевые нагрузки (рисунок 5.10, б), называются **пятями**.

Некоторые общепринятые названия:

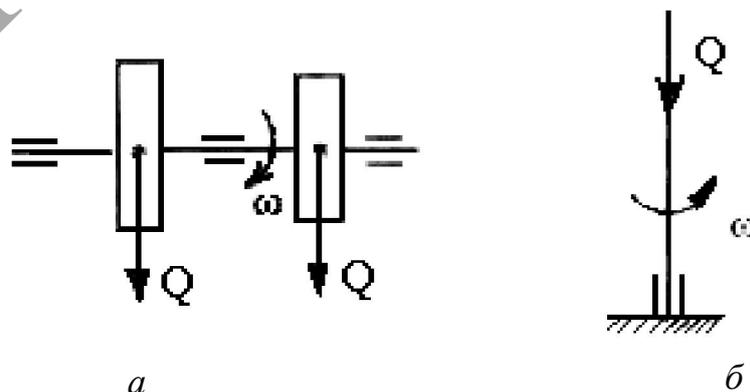


Рисунок 5.10 – Пример вращательных пар

5. Трение в цилиндрических шипах и шейках

Рассмотрим случай, когда между шипом и подшипником имеется *значительный радиальный зазор*, т. е. касание элементов пары происходит по линии (рисунок 5.11).

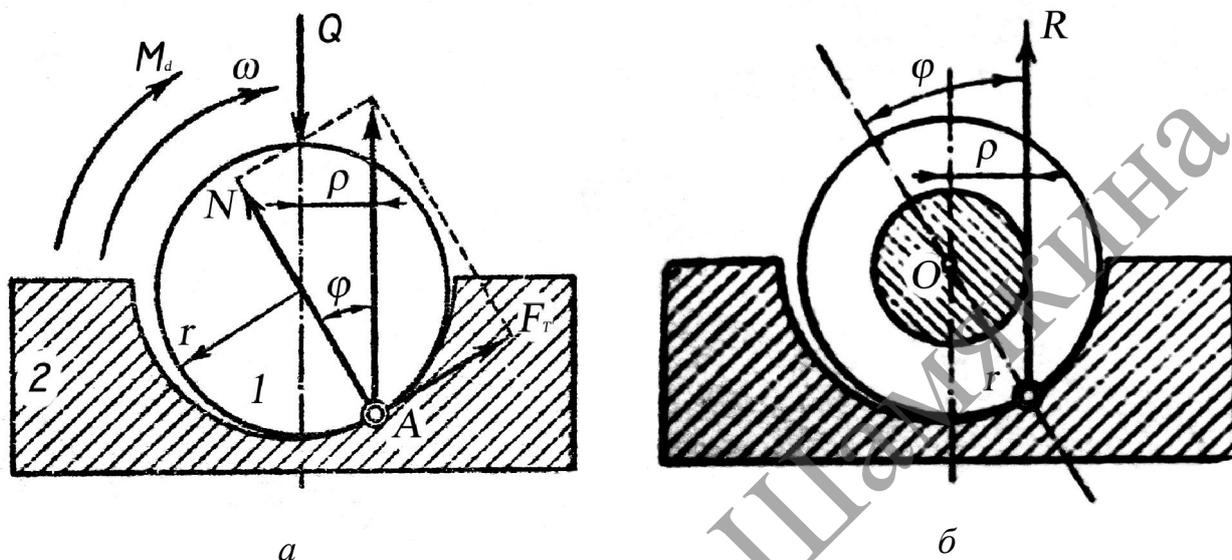


Рисунок 5.11 – Вращательная пара со значительным радиальным зазором

Пусть шип радиусом r (рисунок 5.11, а) находится под действием внешней радиальной нагрузки Q и движущего момента M_d и вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Шип в начале движения «взбегает» по внутренней поверхности подшипника и при достижении установившейся скорости вращения его центр и точка касания A остановятся в таком положении, чтобы полная реакция R оказалась параллельной внешней нагрузке Q , т. е. $\vec{R} \parallel \vec{Q}$. В точке A имеет место скольжение шипа по подшипнику, почему и возникает сила трения F , направленная по касательной к окружностям шипа и подшипника.

Силы Q и R образуют пару сил, момент которой представляет собой момент сопротивления (трения) M_m , уравновешивающий момент движущих сил M_d , т. е.

$$M_m = M_d.$$

$$M_m = F r = f N r = f r R \cos \varphi,$$

где $f = \operatorname{tg} \varphi$ (φ – угол трения).

Из условия равновесия $R = Q$.

$$\text{Тогда} \quad M_m = Q r f \cos \varphi = Q r \sin \varphi = Q \rho, \quad (5.9)$$

где $\rho = r \sin \varphi$.

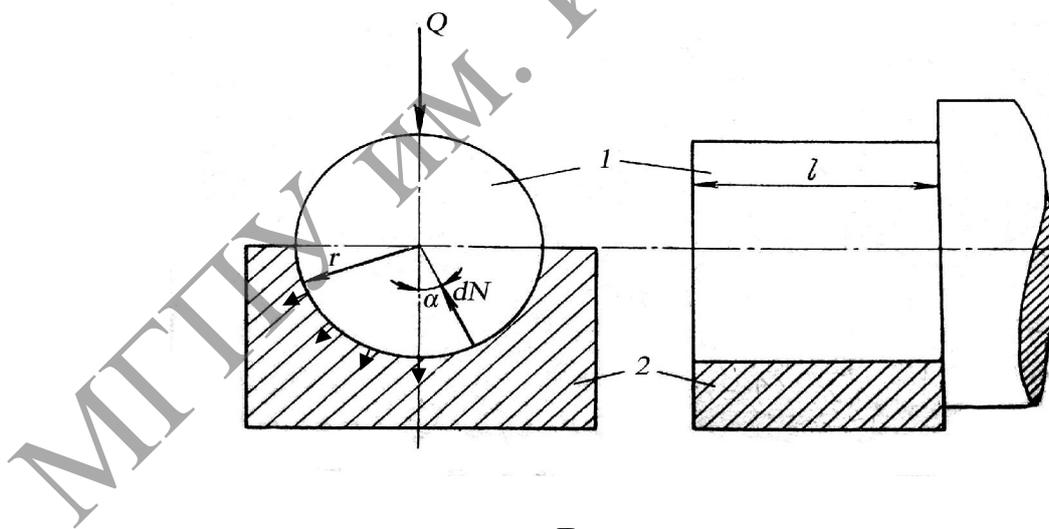
Если из центра шипа описать окружность радиуса ρ , полная реакция R будет направлена по касательной к этой окружности (рисунок 5.11, б). Круг радиуса ρ называется *кругом трения* (по аналогии с конусом трения в поступательных парах).

Введем единый параметр $f_0 = f \cos \varphi$, который носит название *приведенного коэффициента трения вращательной пары*.

Приведенный выше расчет был выполнен для случая, когда вращательная пара выполнена в виде вала в подшипнике.

Мы рассмотрели случай, когда *между шипом и подшипником имеет место значительный радиальный зазор*.

Более общий случай – касание цапфы с подшипником – имеет место только в нижней части. Считаем, что эта часть составляет точно половину цилиндра и удельное нормальное давление по всей поверхности цапфы постоянно ($p = \text{const}$) – *условие постоянства нормального давления* (рисунок 5.12).



**Рисунок 5.12 – Вращательная пара
в приближении постоянного нормального давления**

Если разбить цилиндр на узкие полоски, просчитать для каждой из них элементарный момент трения и проинтегрировать по всему полуцилиндру, получим для момента трения:

$$M_T = \frac{\pi}{2} f r Q,$$

т. е. в этом случае

$$f_0 = \frac{\pi}{2} f = 1,57 f.$$

Это значение получено в приближении *постоянного нормального давления*. Обычно считают, что оно выполняется для неприработавшихся цапф.

Иногда для расчетов принимают *приближение постоянных износов* (рисунок 5.13).

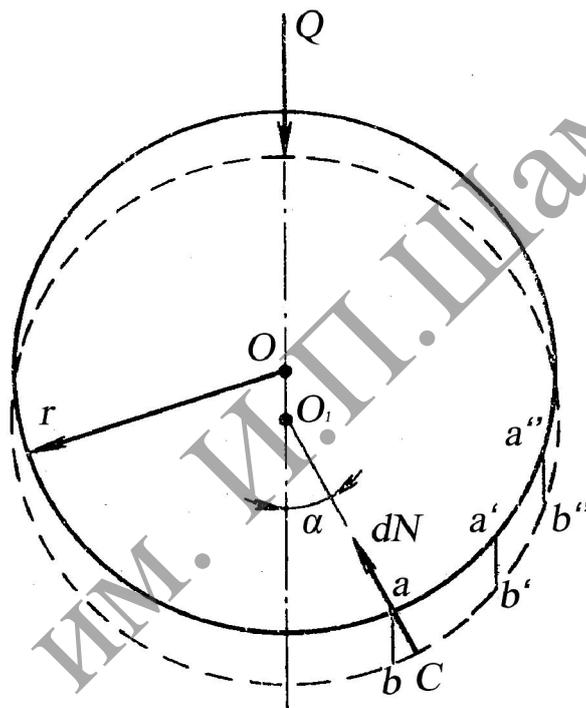


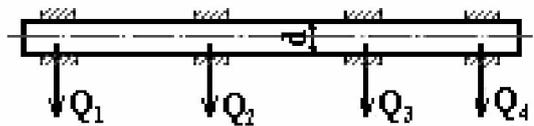
Рисунок 5.13 – Вращательная пара в приближении равенства износов

В этом приближении получают $f_0 = 1,27f$.

Такое значение принимают для *приработавшихся цапф*.

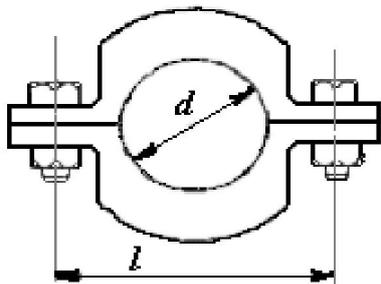
Задания для самостоятельного решения

Задание 1: трансмиссионный вал покоится на четырех подшипниках. Нагрузки на подшипники соответственно равны: $Q_1 = 3\ 000\ \text{Н}$; $Q_2 = 2\ 500\ \text{Н}$; $Q_3 = 2\ 000\ \text{Н}$ и $Q_4 = 3\ 500\ \text{Н}$; диаметр



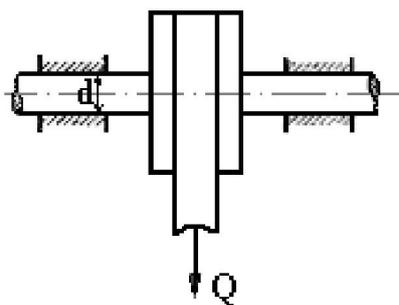
вала $d = 50$ мм, вал вращается равномерно со скоростью $n = 800$ об/мин, коэффициент трения во всех подшипниках $f = 0,1$. Определить мощность N_F теряемую на трение. Вал считать приработанным.

Ответ: $N_F = 292,6$ Вт.



Задание 2: вал диаметром $d = 60$ мм передает крутящий момент $M_{кр} = 106$ Н·м через муфту, затянутую двумя болтами. Определить силу P затяжки болтов, если коэффициент запаса $k = 2$, а коэффициент трения между муфтой и валом $f = 0,2$.

Ответ: $P = 45\,000$ Н.



Задание 3: на валу сидит шкив, который создает радиальную нагрузку на вал $Q = 4\,000$ Н. Диаметр вала $d = 50$ мм, коэффициент трения $f = 0,1$; число оборотов $n = 1\,000$ об/мин. Требуется определить момент трения M_F и мощность N_F , теряемую на трение.

Ответ: $M_F = 12,7$ Н·м; $N_F = 1,33$ кВт.

6. Трение качения

Трение качения – это взаимодействие поверхностей при перекатывании.

Сопротивление перекатыванию зависит от материалов соприкасающихся тел, кривизны соприкасающихся поверхностей и величины прижимающей силы. На преодоление сопротивления перекатыванию тратится работа. Эта работа расходуется на деформирование сопряженных поверхностей.

Пусть неподвижный цилиндр нагружен силой Q (рисунок 5.14, а).

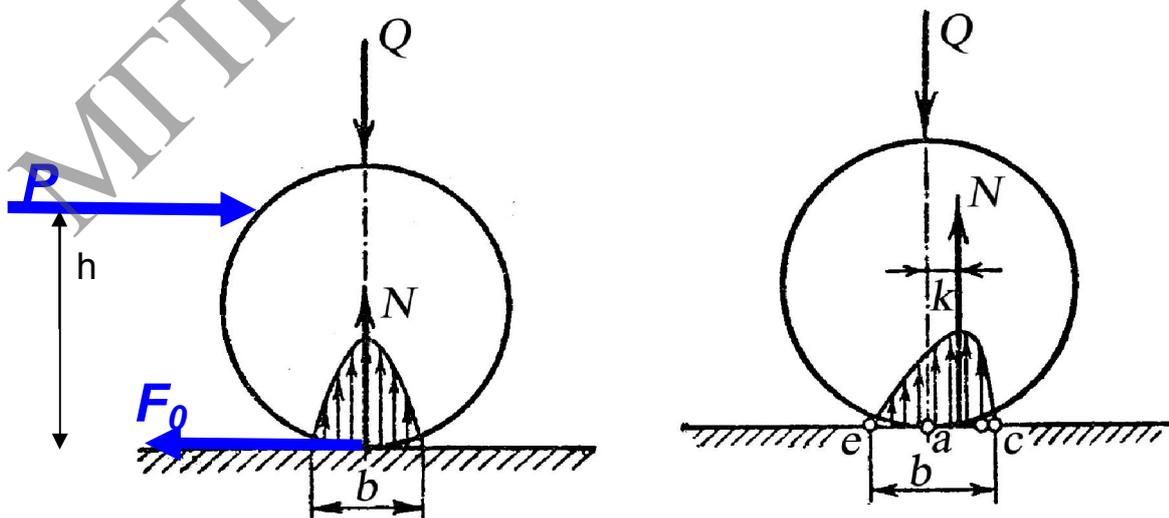


Рисунок 5.14 – К определению трения качения

В месте соприкосновения цилиндра и плоскости возникает местная деформация контактного сжатия на площадке шириной b .

По теории упругости напряжения будут распределяться примерно по эллиптическому закону (рисунок 5.14, а). Кривая напряжений симметрична, поэтому линия действия их равнодействующей N совпадет с линией действия внешней нагрузки Q . При условии равновесия $N = Q$.

Начнем перекатывать цилиндр. Приложим малую движущую силу P так, чтобы цилиндр оставался в покое (равновесии). В точке соприкосновения a при приложении силы P возникает сила трения покоя F_0 , направленная в сторону, противоположную направлению силы P .

Проверим условие равновесия (рисунок 5.14, а):

$$\sum F_x^i = 0; \quad \sum F_y^i = 0; \quad \sum M_a^i = 0$$

или $P - F_0 = 0$; $Q - N = 0$, $\sum M_a^i = ph \neq 0$, т. е. равновесие нарушается, так как

$$\sum M_a^i \neq 0.$$

Противоречие возникло потому, что на самом деле распределение давлений при приложении силы P будет проходить не по эллиптическому закону.

Дело в том, что при приложении силы P участок ac площадки контактного сжатия будет находиться в зоне нарастающих деформаций, а участок ae – в зоне исчезающих деформаций. Из-за внутреннего трения в материале кривые нагрузки и разгрузки материала не совпадают (явление упругого гистерезиса). Поэтому кривая напряжений оказывается несимметричной с максимумом, сдвинутым в сторону движения. Равнодействующая напряжений смещена вправо от точки A на величину k (рисунок 5.14, б). Величину k называют *плечом силы трения качения*.

Проверим теперь состояние равновесия

$$\sum F_x^i = 0; \quad \sum F_y^i = 0; \quad \sum M_a^i = 0$$

или $P - F_0 = 0$; $Q - N = 0$, $Ph = Nk$. В этом случае равновесие соблюдается. Отсюда следует:

$$P = N \frac{k}{h}. \quad (5.14)$$

Момент трения качения

$$M_T = Q \cdot k. \quad (5.15)$$

Коэффициент k называют также *коэффициентом трения качения*.

Коэффициент трения качения имеет размерность длины и представляет собой величину смещения оси действия равнодействующей напряжений от оси приложения внешней нагрузки.

Сопротивление при перемещении груза по каткам

Пусть груз Q перемещается по каткам под действием силы P (рисунок 5.15).

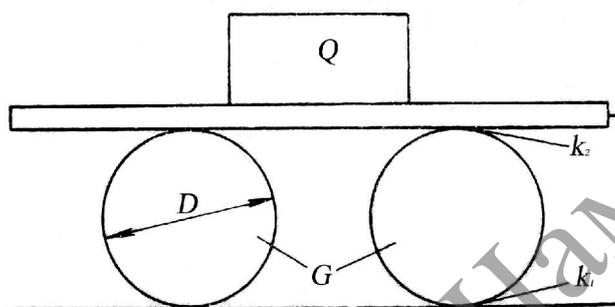


Рисунок 5.15 – Перемещение грузов по каткам

Установим зависимость между движущей силой и весом груза.

Движущий момент $M_{об} = PD$.

Сопротивление качению будет возникать между катками и опорой (с коэффициентом k_1) и между катками и платформой (с коэффициентом k_2). Нагрузка на катки со стороны платформы равна весу груза Q . Нагрузка на опору со стороны катков равна весу груза Q плюс вес всех катков G .

Полный момент сопротивления качению:

$$M_k = k_1(Q + G) + k_2Q. \quad (5.16)$$

При условии равновесия движущий момент равен моменту сопротивления, следовательно:

$$PD = k_1(Q + G) + k_2Q, \quad (5.17)$$

откуда

$$P = \frac{k_1(Q + G) + k_2Q}{D}. \quad (5.18)$$

Рассмотрим частный случай: если коэффициенты трения для обеих поверхностей одинаковы: $k = k_1 = k_2$, а вес катков пренебрежимо мал по сравнению с весом груза ($G \approx 0$), то получим:

$$P = \frac{2kQ}{D} = \frac{k}{R}Q = f_T Q,$$

где $f_T = \frac{k}{R}$ – коэффициент тяги.

Сопротивление передвижению груза на колесах

При передвижении груза на колесах (тележке – рисунок 5.16) имеют место трение качения между колесами и опорой и трение скольжения в осях.

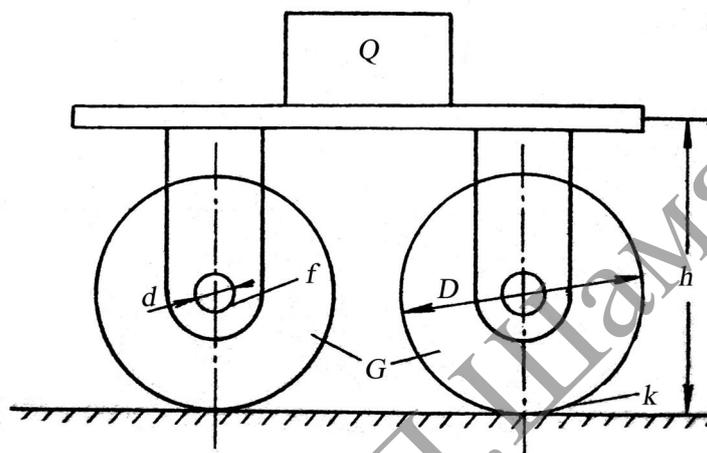


Рисунок 5.16 – Перемещение груза на колесах

Нагрузка Q распределяется на все колеса (равномерно или нет – зависит от положения центра тяжести). Потери на трение будут пропорциональны нагрузке, приходящейся на колесо. Т.к. потери, возникающие во всех колесах, надо сложить, результат не изменится, если считать, что вся нагрузка как бы приходится на одно колесо.

Линия действия движущей силы P находится на расстоянии h от точки A .

Движущий момент, поворачивающий колеса:

$$M_{\text{дв}} = P \frac{D}{2}.$$

Опрокидывающий момент:

$$M_{\text{оп}} = P(h - R).$$

При условии равновесия движущий момент будет равен сумме моментов трения качения и трения в осях:

$$P \frac{D}{2} = (Q + G)k + Qf_o \frac{d}{2},$$

откуда движущая сила

$$P = \frac{(Q + G)k + Qf_o r}{R}.$$

Пренебрегая весом колес, получим:

$$P = \frac{k + f_o r}{R} Q \quad \text{или} \quad P = k_o Q,$$

где $k_o = \frac{k}{R} + \frac{r}{R} f_o$ – коэффициент тяги.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: требуется сравнить потери на трение в подшипниках скольжения и качения при следующих данных: в обоих случаях диаметр цапфы $d_c = 60$ мм, нагрузки (радиальная сила) $Q = 10\,000$ Н. Приведенный коэффициент трения скольжения $f_0 = 0,12$; коэффициент трения качения $k = 0,0005$ см; диаметр внутреннего кольца подшипника $D_B = 70$ мм; диаметр шариков $d = 12$ мм.

Ответ: в подшипнике скольжения $M = 36$ Н · м в шарикоподшипнике $M_k = 0,478$ Н · м, т. е. примерно в 75 раз меньше.

Задание 2: требуется определить усилие P , необходимое для равномерного перемещение железнодорожного вагона при следующих данных: масса вагона $m = 26\,000$ кг, масса всех колес с осями $m = 4\,000$ кг; диаметр колес $D = 800$ мм; диаметр цапф осей $d = 100$ мм, приведенный коэффициент трения скольжения в осях $f_0 = 0,1$; коэффициент трения качения колес по рельсам $k = 0,05$ см.

Ответ: $P = 3\,555$ Н.

Задание 3: определить, при какой величине угла α – наклона плоскости к горизонту, шарик, лежащий на ней, не будет скатываться под действием собственного веса, если коэффициент трения качения $k = 0,01$ см; диаметр шарика $d = 10$ мм.

Ответ: $\alpha < 0^\circ 35'$.

Практическая работа № 6. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

Задачи и методы силового расчета:

Динамика механизмов изучает движение звеньев во взаимодействии с действующими на них силами. Внешние силы определяются согласно назначению машины (механизма) по диаграммам нагрузок (*механическим характеристикам*), требованиям технологического процесса и т. п. Кроме внешних сил, при движении машины возникают внутренние силы – это **реакции в парах**.

Задачи силового расчета:

- определение сил, действующих на звенья;
- определение реакций в кинематических парах;
- определение уравновешивающей силы P_y и уравновешивающего момента M_y .

Результаты силового расчета необходимы для дальнейшего исследования работы машины, для расчета звеньев (деталей) и опор на прочность, в расчетах на износ и трение, при определении энергии, расходуемой при работе механизмов, и т. п.

Применяют несколько методов силового расчета механизмов:

- статический расчет;
- динамический расчет;
- динамический расчет с учетом сил и моментов трения, возникающих в парах.

Определение усилий без учета сил инерции, возникающих при движении механизма, называется **статическим расчетом**.

Статический расчет применяется только для тихоходных машин, в которых силы инерции малы и ими пренебрегают (т. е. пренебрегают ускорениями, возникающими в процессе движения).

В современных быстроходных машинах ускорения весьма значительны. Неучет ускоренного движения звеньев вызовет недооценку нагружающих сил, что может привести к ошибкам в дальнейших инженерных расчетах.

Поэтому для быстроходных машин применяется **динамический расчет**. Для особо ответственных машин и механизмов, помимо сил инерции, учитывают **силы трения и моменты трения в парах**.

Далее в первом приближении будем считать, что **силы трения отсутствуют**.

Динамический силовой расчет базируется на **принципе Даламбера**: если ко всем внешним силам, действующим на звено механизма, добавить силы инерции, то под действием всех этих сил звено можно рассматривать как находящееся в равновесии.

Таким образом, задача динамики решается методом статики, поэтому такой расчет называют **кинетостатическим**.

Составив уравнения равновесия и решив их, мы можем найти реакции R в кинематических парах. Силы инерции звеньев зависят от ускорений, значит, искомые силы также зависят от ускорений. Следовательно, для проведения силового расчета надо знать закон движения механизма.

Силовой расчет начинается с последней присоединенной группы и заканчивается расчетом начального звена (рисунок 6.1).

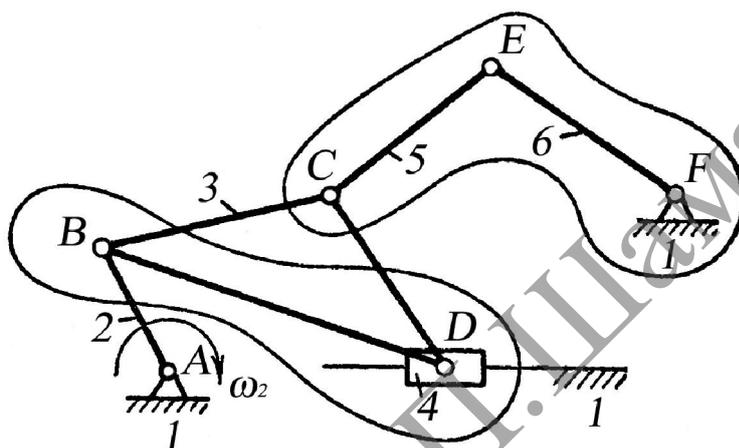


Рисунок 6.1 – К порядку силового расчета

Расчет сил, действующих на звенья механизма

Силы инерции звеньев

Силы инерции, возникающие при движении звеньев механизма, зависят от характера движения этих звеньев.

В общем случае для звена, совершающего плоскопараллельное движение (рисунок 6.2), все силы инерции могут быть сведены к силе инерции $\vec{F}_и$, приложенной к центру масс звена S (поступательная составляющая движения), и к паре сил инерции с моментом $M_и$ (вращательная составляющая движения).

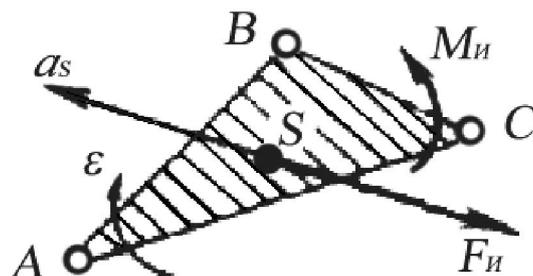


Рисунок 6.2 – Силы и момент силы инерции плоского звена

В этом случае сила инерции

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_S,$$

где m – масса звена,

S – центр масс звена,

\vec{a}_S – полное ускорение центра масс.

Направление силы инерции противоположно направлению полного ускорения центра масс.

Главный момент пары сил инерции $\vec{M}_u = -J_S \vec{\varepsilon}$ направлен противоположно угловому ускорению. Здесь J_S – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости движения звена, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение звена.

Частные случаи – рисунки 6.3, 6.4, 6.5

Если звено совершает поступательное движение (рисунок 6.3), то в этом случае имеем: $F_u = -ma_S$; $M_u = 0$.

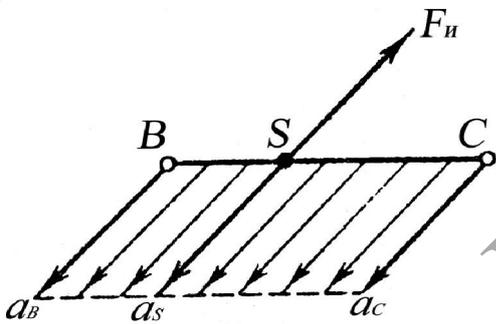


Рисунок 6.3 –
Звено, совершающее
поступательное движение

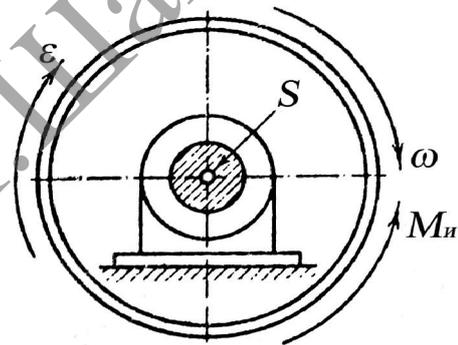


Рисунок 6.4 – Звено совершает неравномерное вращательное движение, центр масс S совпадает с осью вращения O

Если звено совершает неравномерное вращательное движение (рисунок 6.4), то для этого случая: $F_u = 0$; $M_u = -J_S \varepsilon$.

При равномерном вращении звена: $F_u = 0$; $M_u = 0$.

В случае если звено совершает вращательное движение (рисунок 6.5),

имеем: $\vec{F}_u = -m\vec{a}_S$;

$$\vec{M}_u = -J_S \vec{\varepsilon}.$$

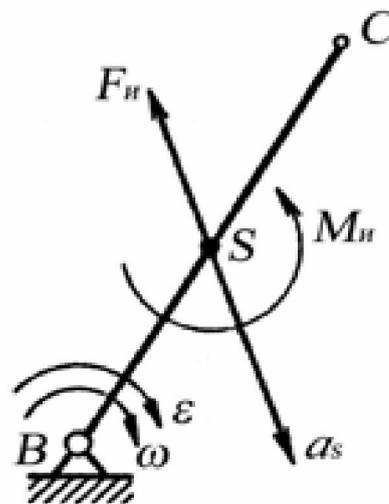


Рисунок 6.5 – Звено выполняет вращательное движение вокруг оси O , центр масс S не совпадает с осью вращения

Силовой расчет механизмов, имеющих группы 2 класса

Рассмотрим силовой расчет механизма, имеющего в своем составе группу 2 класса 1 вида (рисунок 6.6).

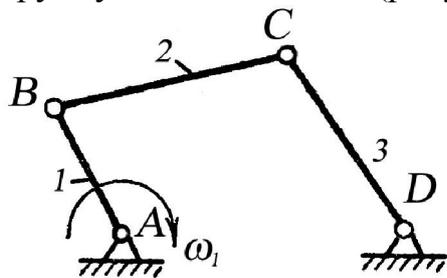


Рисунок 6.6 – Механизм, имеющий группу 2 класса 1 вида

- закон движения ведущего звена;
- силы сопротивлений и вес звеньев.

По этим исходным данным можно найти силы инерции F_u и моменты сил инерции M_u и сложить их с внешними силами. Тогда будут известны сила F_2 и момент M_2 , действующие на звено 2, а также сила F_3 и момент M_3 , действующие на звено 3.

Отсоединим группу 2–3 и нанесем на неё внешние силы и реакции связей R_{21} , R_{34} от отсоединенных звеньев 1 и 4 (рисунок 6.7). Для удобства расчета эти реакции представим в виде геометрических сумм тангенциальных и нормальных составляющих, известных только по линии действия:

$$\vec{R}_{21} = \vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^\tau;$$

$$\vec{R}_{34} = \vec{R}_{34}^n + \vec{R}_{34}^\tau.$$

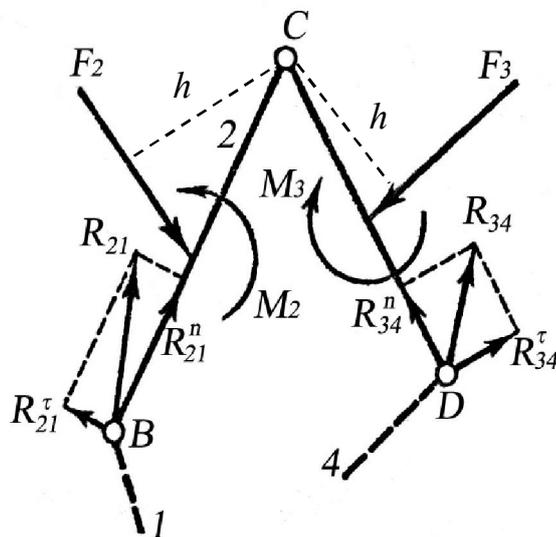


Рисунок 6.7 – К силовому расчету механизма

Направление (не линия действия) этих составляющих выбирается произвольно, их действительное направление покажут дальнейшие расчеты.

Порядок расчета:

1. Тангенциальные составляющие реакций определяем из уравнения моментов для каждого звена относительно точки C .

Для 2 звена $F_2 h_2 + M_2 - R_{21}^{\tau} \cdot BC = 0;$

$$R_{21}^{\tau} = \frac{F_2 h_2 + M_2}{BC}. \quad (6.1)$$

Если величина тангенциальной составляющей окажется отрицательной, её направление следует изменить на противоположное.

Для 3 звена $F_3 h_3 + M_3 - R_{34}^{\tau} \cdot CD = 0;$

$$R_{34}^{\tau} = \frac{F_3 h_3 + M_3}{CD}. \quad (6.2)$$

h_2 и h_3 измеряем на кинематической схеме в масштабе μ_k . BC и CD берем в том же масштабе.

2. Запишем уравнение равновесия для диады 2–3 в векторной форме:

$$\underline{\underline{\vec{R}_{21}^n}} + \underline{\underline{\vec{R}_{21}^{\tau}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_3}} + \underline{\underline{\vec{R}_{34}^n}} + \underline{\underline{\vec{R}_{34}^{\tau}}} = 0. \quad (6.3)$$

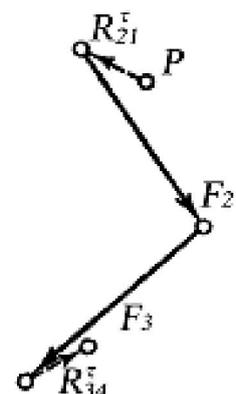
Здесь и в дальнейшем силы, известные по модулю и направлению, подчеркнуты дважды, а известные только по линии действия – один раз.

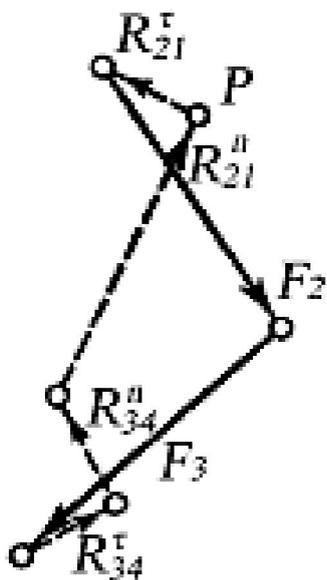
3. Для определения реакций в кинематических парах применим *метод планов сил*. Строим план сил согласно уравнению (6.3) в масштабе μ_p , Н/мм.

Порядок построения:

1. Из полюса P последовательно откладываем R_{21}^{τ} , F_2 , F_3 , R_{34}^{τ} .

2. По построению определяем нормальные составляющие реакций R_{21}^n и R_{34}^n (проводим перпендикуляры к соответствующим тангенциальным составляющим до точки их пересечения, измеряем на плане их длины и пересчитываем в масштабе).





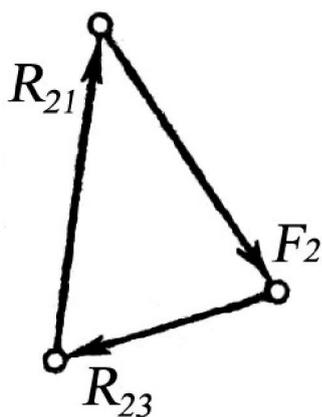
3. По построению определяем полные реакции R_{12} и R_{43} (измеряем на плане их длины и пересчитываем в масштабе).

4. Для определения реакций в кинематической паре С нужно составить уравнение равновесия для одного из звеньев, например, 2:

$$\underline{\underline{\vec{R}_{21}}} + \underline{\underline{\vec{F}_2}} + \underline{\underline{\vec{R}_{23}}} = 0.$$

Построив треугольник сил, найдем R_{32} . Величину R_{32} можно найти также из построенного плана сил, для этого надо замкнуть силы R_{21} и F_2 .

Для проверки можно построить план сил для звена 3. По 3-му закону Ньютона $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{32}$.



Силовой расчет ведущего звена

Ведущее звено образует со стойкой низшую пару I класса. Применим к ведущему звену формулу:

$$3n - 2P_5 = 3 - 2 = 1,$$

т. е. число уравнений, которые мы можем составить, на единицу больше числа неизвестных. Значит, звено не находится в равновесии.

Чтобы имело место равновесие, необходимо дополнительно ввести силу или пару сил, уравновешивающую все силы, приложенные к начальному звену.

Пример решения задач

Пример: для кривошипно-ползунного механизма одноцилиндрового двигателя уравновешивающими силой и моментом являются реактивные силы или момент от той рабочей машины, которую он приводит в движение.

Если коленвал двигателя и главный вал рабочей машины соединены посредством муфты, рассматриваем *уравновешивающий момент* сил сопротивления рабочей машины (рисунок 6.8).

Если посредством зубчатой передачи, то рассматриваем реактивную силу рабочей машины, приложенную к зубчатому колесу на валу двигателя (рисунок 6.9).

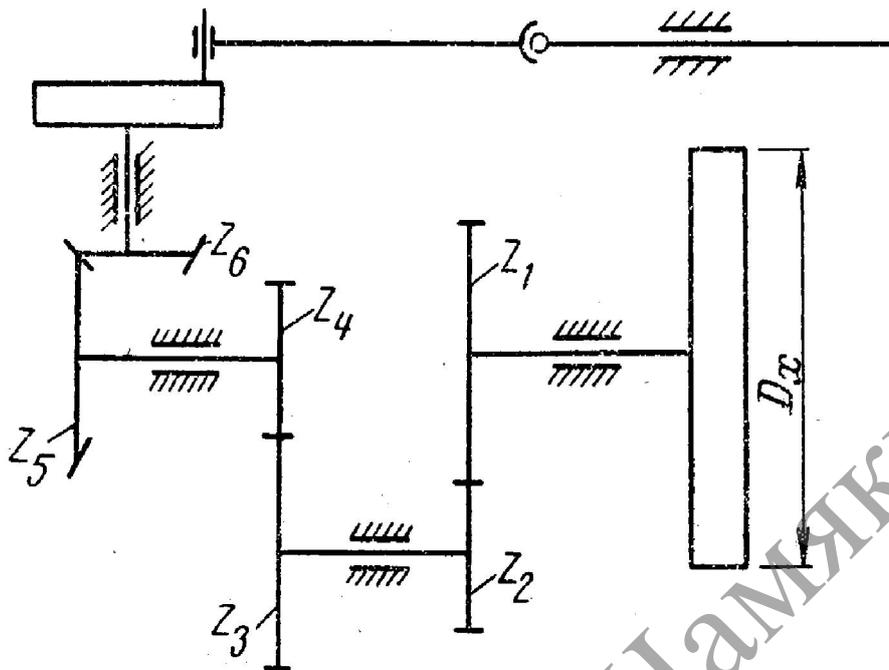


Рисунок 6.8. –
К силовому расчету ведущего звена

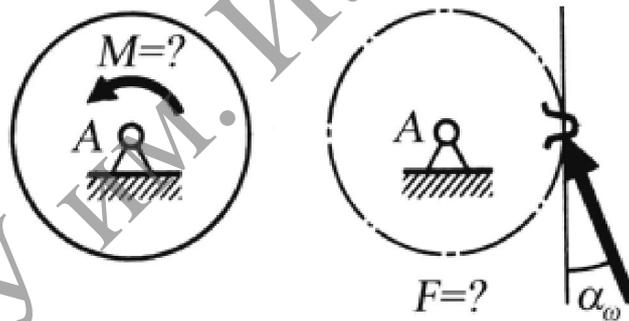


Рисунок 6.9 –
К силовому расчету ведущего звена

Таким образом, *линия действия* уравнивающей силы полностью определена конструкцией передаточного механизма от машины, т. е. *известна*.

Итак, на ведущее звено действует сила реакции стойки \vec{R}_{14} , сила $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$ и уравнивающая сила F_y . За точку приложения уравнивающей силы принимаем точку B , направление уравнивающей силы – перпендикулярно звену AB .

Последовательность расчета:

1. Определяем уравновешивающую силу из уравнения моментов относительно точки A : $-M_y + F_y \cdot AB + R_{12} \cdot h_1 = 0$,

откуда
$$F_y = \frac{M_y - R_{12}h_1}{AB}. \quad (6.4)$$

Если кривошип приводится непосредственно через муфту от привода, то для равновесия нужно приложить уравновешивающий момент M_y . В нашем случае он равен:

$$M_y = F_y \cdot AB.$$

2. Определяем реакцию стойки R_{14} (рисунок 6.10) из плана сил, построенного по векторному уравнению равновесия звена L :

$$\vec{R}_{14} + \vec{F}_y + \vec{R}_{12} = 0. \quad (6.5)$$

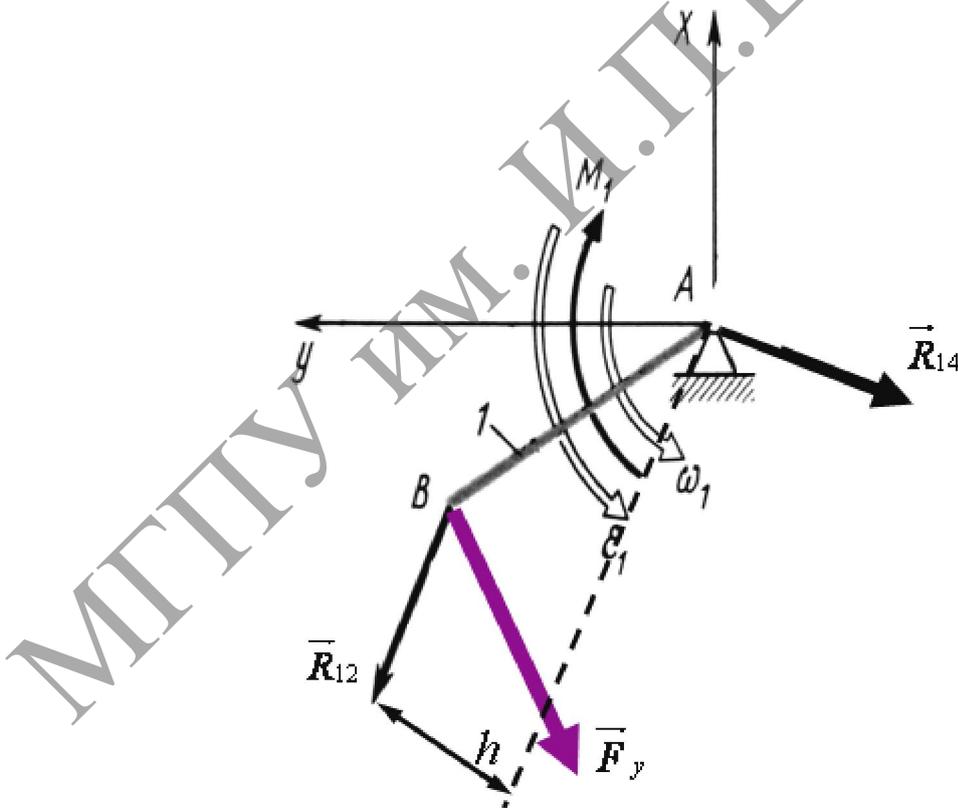


Рисунок 6.10 – К силовому расчету ведущего звена

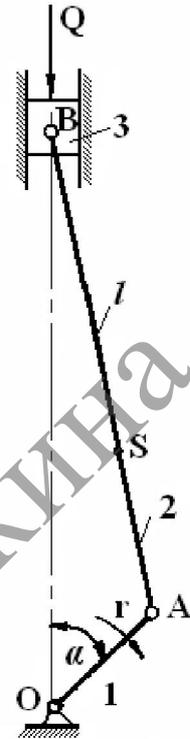
Методика и последовательность расчета механизмов, имеющих группы 2 класса других видов, аналогичны приведенным выше.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: произвести силовой анализ и определить силы инерции реакции во всех кинематических парах, уравновешивающую силу и мгновенную мощность на кривошипе кривошипно-ползунного механизма (двигатель автомобиля ГАЗ-51) в положении, когда кривошип повернут на угол $\alpha = 45^\circ$, по следующим данным: длина кривошипа $r = 55$ мм, длина шатуна $l = 200$ мм, масса шатуна $m_2 = 1$ кг, масса поршня $m_3 = 0,60$ кг, момент инерции шатуна относительно центра тяжести $I_S = 0,01$ кг \cdot м², центр тяжести S шатуна находится от точки A на расстоянии $AS = \frac{1}{3}AB$. Давление газов на поршень $Q = 7\,500$ Н.

Кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 2\,800$ об/мин.

Ответ: $U_2 = 4\,126,2$ Н; $U_3 = 2\,063,4$ Н; $R_{3,0} = 950$; $R_{2,3} = R_{3,2} = 3\,200$; $P_{1,0} = 980$ Н; $P_{yp} = 3\,650$ Н; $N_P = 58,86$ кВт.

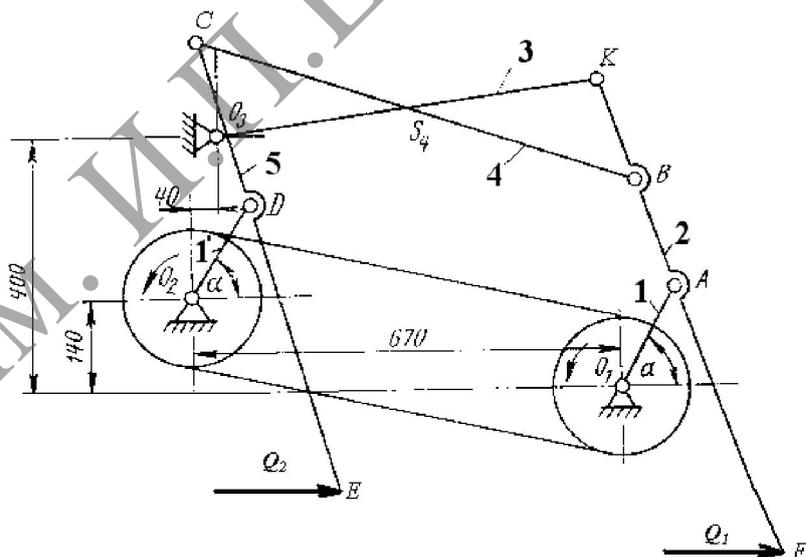


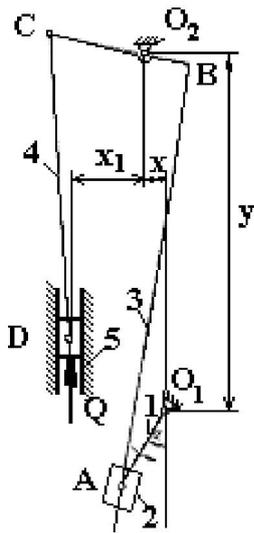
Задание 2: произвести силовой анализ (определить реакции во всех кинематических парах, уравновешивающую силу и мгновенную мощность на кривошипе) механизма упаковщика транспортера-пресс-подборщика для положения, указанного на схеме ($\alpha = 60^\circ$), по следующим

данным: $O_1A = O_2D = 180$ мм; $AK = 350$; $KF = 775$; $AB = BK = 175$; $KO_3 = 600$; $BC = 725$; $DC = 270$; $CE = 775$ мм (остальные размеры указаны на схеме механизма), масса звена 4 (BC) $m_4 = 6$ кг; $Q_1 = 90$ Н; $Q_2 = 175$ Н; кривошипы вращаются равномерно со скоростью $n_1 = 80$ об/мин.

Указание: учесть вес и силу инерции только звена 4, центр тяжести S_4 которого находится на середине звена. Два кривошипа O_1A и O_2D считать как один кривошип.

Ответ: $U_4 = 100$ Н; $R_{1,0} = 343$; $R_{1,2} = R_{2,1} = 363$; $R_{2,3} = R_{3,2} = 560$; $R_{2,4} = R_{4,2} = 686$; $R_{3,0} = 294$; $R_{4,5} = R_{5,4} = 686$; $R_{5,1} = R_{1,5} = 1\,050$; $R_{yp} = P'_{yp} + P''_{yp} = 490 - 46,8 = 443,2$ Н; $N_P = 668$ Вт.



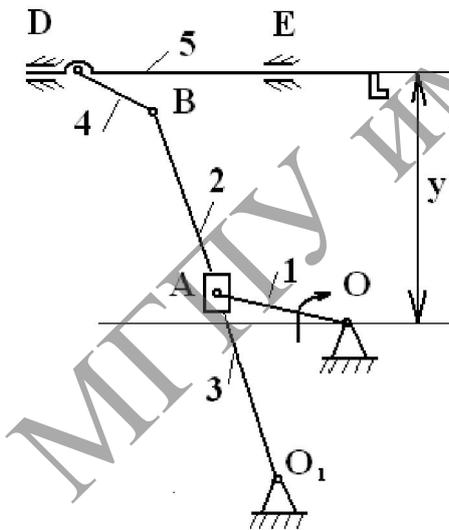


Задание 3: произвести силовой анализ механизма водяного насоса для положения, указанного на схеме ($\alpha = 30^\circ$), по следующим данным: $O_1A = 70$ мм; $BO_2 = 40$; $O_2C = 80$; $CD = 240$; $x = 20$; $x_1 = 60$; $y = 280$ мм; кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 200$ об/мин; коромысло 3 имеет массу $m_3 = 50$ кг, шатун 4 – $m_4 = 24$ кг и ползун 5 – $m_5 = 30$ кг, сила полезных сопротивлений $Q = 980$ Н.

Ответ: $U_3 = 1\ 620$ Н; $U_4 = 290$; $U_5 = 365$; $R_{1,0} = 932$; $R_{1,2} = R_{2,1} = R_{2,3} = R_{3,2} = 2\ 205$; $R_{3,0} = 7\ 650$; $R_{3,4} = R_{4,3} = 9\ 954$; $R_{4,5} = R_{5,4} = 1\ 000$; $R_{5,0} = 785$; $P_{np} = 2\ 550$ Н; $N_p = 3,74$ кВт.

Задание 4: произвести силовой анализ механизма долбежного станка для положения, указанного на схеме ($\alpha = 20^\circ$), по следующим данным: $O_1A = 120$ мм; $BO_2 = 525$; $BC = 430$; $x = 380$; $y = 65$ мм; $\beta = 20^\circ$; кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 26$ об/мин; звенья имеют следующие массы: кулиса – $m_3 = 95$ кг, шатун 4 – $m_4 = 25$ кг, ползун 5 (долбляк) – $m_5 = 175$ кг; сила полезных сопротивлений $Q = 7\ 355$ Н.

Ответ: $R_{1,0} = 5\ 020$ Н; $R_{1,2} = R_{2,1} = R_{2,3} = R_{3,2} = 574$; $R_{3,0} = 1\ 420$; $R_{3,4} = R_{4,3} = 5\ 550$; $R_{4,5} = R_{5,4} = 5\ 500$; $R_{5,0} = 1\ 225$; $P_{np} = 2\ 670$ Н; $M_p = 320$ Н·м; $N_p = 0,87$ кВт.



Задание 5: произвести силовой анализ механизма поперечно-строгального станка для положения, указанного на схеме ($\alpha = 20^\circ$), по следующим данным: $O_1A = 88$ мм; $BO_2 = 660$; $BC = 110$; $y = 345$ мм; кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 160$ об/мин; звенья имеют следующие массы: кулиса 3 – $m_3 = 55$ кг; шатун 4 – $m_4 = 7$ кг; ползун 5 – $m_5 = 105$ кг; сила полезных сопротивлений (сопротивление резанию) $Q = 4\ 575$ Н.

Ответ: $U_3 = 790$ Н; $U_4 = 194$; $U_5 = 3\ 000$; $R_{1,0} = 15\ 300$; $R_{1,2} = R_{2,1} = R_{2,3} = R_{3,2} = 18\ 500$; $R_{3,0} = 9\ 800$; $R_{3,4} = R_{4,3} = 11\ 800$; $R_{4,5} = R_{5,4} = 9\ 800$; $R_{5,0} = 3\ 880$; $P_{np} = 9\ 150$ Н; $M_p = 8\ 052$ Н·м; $N_p = 13,5$ кВт.

Движение машины под действием заданных сил

Одной из основных задач теории механизмов и машин является определение законов движения их исполнительных органов в предположении, что законы изменения движущих сил и сил сопротивлений, приложенных к машине, известны (заданы).

Для решения этой задачи используем уравнение движения в форме изменения кинетической энергии:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = A_d - A_c = \int_{S_1}^{S_2} (F_d - F_c) ds \quad (6.6)$$

или
$$\frac{1}{2} \left(\sum_i (m_i v_{i2}^2 + J_i \omega_{i2}^2) - \sum_i (m_i v_{i1}^2 + J_i \omega_{i1}^2) \right) = \int_{S_1}^{S_2} (F_d - F_c) ds \quad (6.7)$$

Определение отдельных членов уравнения в формулах (6.6) и (6.7) требует громоздких вычислений.

Задачу можно существенно упростить, если все силы, действующие на звенья, заменить силами, приложенными к одному из звеньев механизма.

При этом необходимо, чтобы работа на рассматриваемом возможном перемещении или мощность, развиваемая заменяющими силами, были соответственно равны сумме работ или мощностей, развиваемых силами, приложенными к звеньям исследуемых механизмов.

Заменяющие силы, удовлетворяющие этим условиям, получили название **приведенных сил**. Звено механизма, к которому приложены приведенные силы, носит название **звена приведения**, а точка приложения приведенных сил – **точки приведения**.

При этом все массы заменяем одной условной массой, называемой **приведенной массой** m_n и сосредоточенной в точке приведения.

Если рассматриваемый механизм имеет одну степень свободы, то для изучения его движения достаточно знать закон движения одного из его звеньев (закон изменения обобщенной координаты).

Обычно за звено приведения выбирают то звено, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма. Тогда вместо рассмотрения всего комплекса звеньев механизма можно рассмотреть звено, например кривошип AB (рисунок 6.11), обобщенной координатой которого является угол φ . Направление приведенной силы может быть выбрано произвольно, например, перпендикулярно к оси кривошипа.

Будем считать, что в точке B звена I приложены две приведенные силы:

- сила F_n – приведенная движущая сила;
- сила F_c – приведенная сила сопротивления.

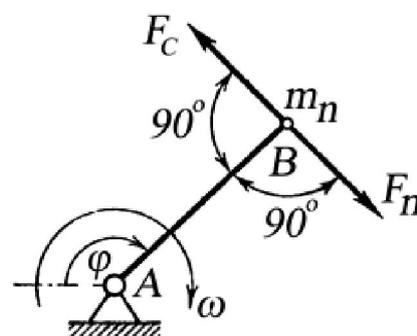


Рисунок 6.11 –
Звено приведения

При этом сила F_n должна производить работу A_d , равную работе всех движущих сил, или, что то же самое, развивать мощность N_n , равную мощности всех движущих сил, а сила F_c – производить работу A_c , равную работе всех сил сопротивлений, или, иначе, развивать мощность N_c , равную мощности всех сил сопротивлений.

Точку, в которой сосредоточена приведенная масса m_n , и к которой приложены приведенные силы, называют **точкой приведения**.

Звено, которому принадлежит точка приведения, называют **звеном приведения** (рисунок 6.11).

Таким образом, исследование движения механизма сводится к исследованию движения звена приведения, находящегося под действием приведенных сил и имеющего приведенную массу.

Приведенная сила (момент)

Приведенной силой называется такая сила, элементарная работа которой на возможном перемещении точки приведения равна сумме элементарных работ приводимых сил на перемещениях точек приложения этих сил.

$$dA_n(S_n) = \sum_i dA_i(S_i) \quad (6.8)$$

или:

$$N(S_n) = \sum_i N(S_i), \quad (6.9)$$

т. е. мощность приведенной силы равна сумме мощностей приводимых сил.

Перепишем уравнение (6.3) в виде:

$$F_n dS_n \cos \alpha_n = \sum_i F_i dS_i \cos \alpha_i. \quad (6.10)$$

После деления на dt получим аналог уравнения (6.9):

$$F_n v_n \cos \alpha_n = \sum_i F_i v_i \cos \alpha_i \quad (6.11)$$

Пусть к ползуну 3 кривошипно-ползунного механизма приложена сила F_3 (рисунок 6.12, а). Найдем приведенную силу F_n , приложенную в точке A звена приведения 1.

Согласно уравнению (6.6), имеем:

$$F_n v_A = F_3 v_B.$$

Построив в масштабе μ_v план скоростей (рисунок 6.12, б), находим

$$v_A = \mu_v(pa); \quad v_B = \mu_v(pb),$$

откуда

$$F_n = F_3 \frac{v_B}{v_A} = F_3 \frac{\mu_v \cdot (pb)}{\mu_v \cdot (pa)} = F_3 \frac{pb}{pa}.$$

Отсюда *вывод*: приведенную силу можно найти, не зная истинной скорости движения машины. Достаточно знать величины соответствующих отрезков на плане скоростей.

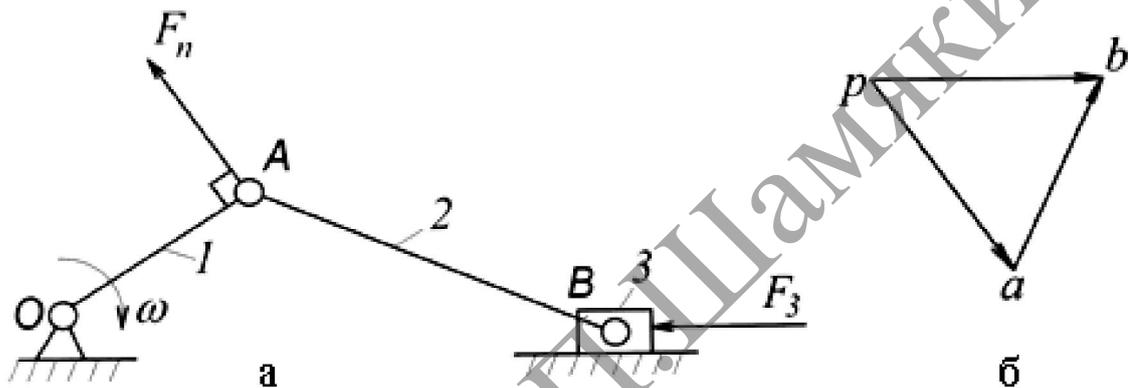


Рисунок 6.12 – К расчету приведенной силы

Теорема Жуковского

Приведенную силу F_n можно найти при помощи **теоремы Жуковского**, которая заключается в следующем:

если в соответствующие точки плана скоростей, повернутого на 90° , перенести все силы, действующие на механизм, в том числе силы инерции, то сумма моментов этих сил относительно полюса плана скоростей равна моменту приведенной силы (рисунок 6.13).

$$F_n h_n = \sum_i F_i h_i, \quad (6.12)$$

где F_n – приведенная сила,

F_i – действующая сила,

h_n, h_i – плечи соответственно сил F_n и F_i , определяемые из плана скоростей.

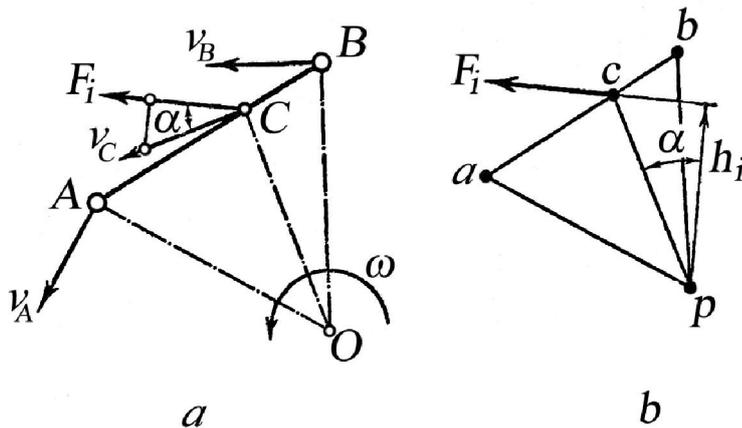


Рисунок 6.13 – К теореме Жуковского

Повернутый план скоростей можно рассматривать как *жесткий рычаг* с осью вращения в полюсе плана, который будет находиться в равновесии после приложения всех действующих сил.

Найдем F_n для механизма, показанного на рисунок 6.14, а, для которого известны F_3, F_2 .

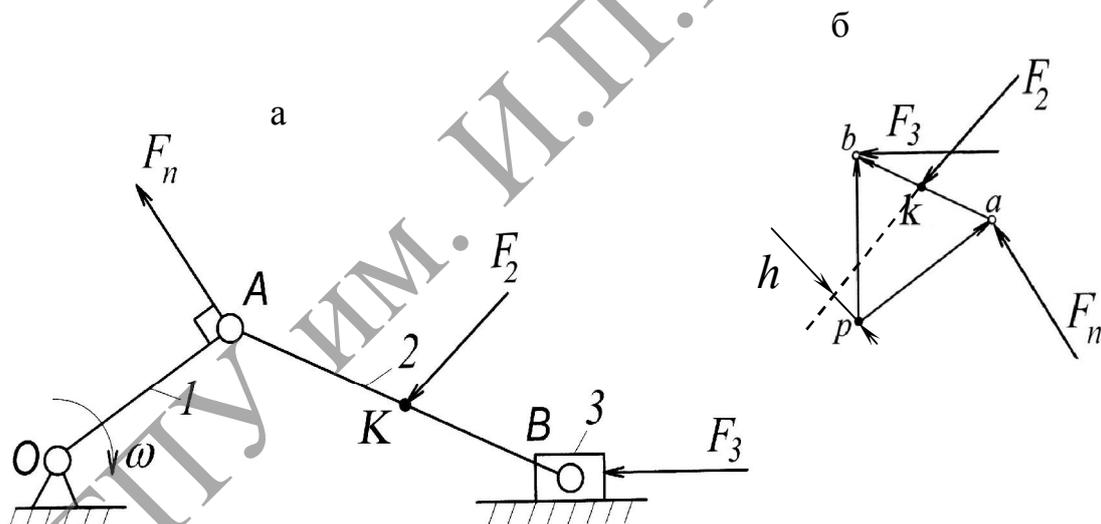


Рисунок 6.14 – К расчету привода

В качестве точки приложения F_n принимаем точку A , а направление силы перпендикулярно звену l .

Построив план скоростей, повернутый на 90° С (рисунок 6.14, б) и приложив в соответствующих точках силы, действующие на механизм, согласно теореме, имеем

$$F_n \cdot pa = F_3 h_3 + F_2 h_2.$$

Величины pa , pb и h_2 замеряем на плане скоростей.

Откуда
$$F_n = F_3 \frac{pb}{pa} + F_2 \quad (6.13)$$

Если за точку приложения приведенной силы принять точку приложения уравнивающей силы, то **уравнивающая сила F_y будет равна и противоположна приведенной силе F_n** , т. е.

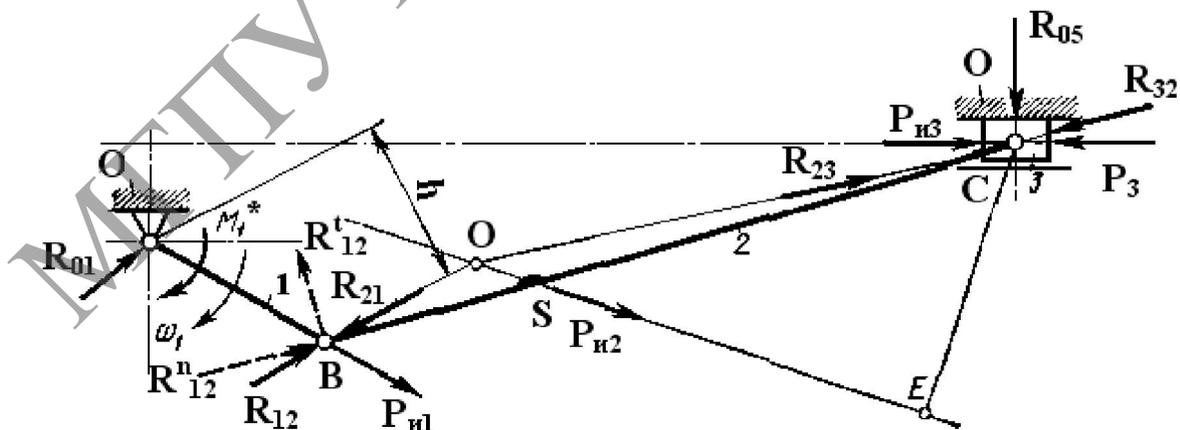
$$F_n = -F_y. \quad (6.14)$$

Таким образом можно определить уравнивающую силу.

Таким образом, если на звенья механизма действуют силы $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$, под действием которых механизм не находится в равновесии, то из уравнения моментов всех этих сил относительно полюса плана скоростей всегда можно определить величину силы F_y , уравнивающей заданные силы.

Пример решения задач

Задание 1: для кривошипно-ползунного механизма двигателя $\mu_e = 0,002$ м/мм определить реакции во всех кинематических парах и приведенный момент M_1^* на валу A кривошипа AB . Для звеньев 1, 2 и 3 силы инерции: $P_{I1} = 790$ Н, $P_{I2} = 2\,256$ Н и $P_{I3} = 2\,981$ Н. Кроме того, на звено 3 действует движущая сила $P_3 = 8\,826$ Н, определяемая по заданной индикаторной диаграмме. Силами тяжести звеньев можно пренебречь.



Решение: механизм состоит из входного звена 1 и двухповодковой группы, состоящей из звеньев 2 и 3, из двух вращательных пар B и C и из одной крайней поступательной пары – ползун 3 и неподвижная направляющая. Силовой расчет механизма начинаем с двухповодковой

группы 2–3, на которую действуют известные по величине и направлению силы $\overline{R_{И1}}$, $\overline{R_{И2}}$ и $\overline{R_{И3}}$.

Эту группу 2–3 освобождаем от связей и прикладываем вместо них две реакции: $\overline{R_{03}}$ – в поступательной паре, перпендикулярную направляющей ползуна и неизвестную по величине; R_{12} – в шарнире B , неизвестную ни по величине, ни по направлению.

Реакцию $\overline{R_{12}}$ представляем в виде двух компонентов: $\overline{R_{12}^t}$, направленный перпендикулярно звену BC , и $\overline{R_{12}^n}$, направленный вдоль звена BC . Составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки C , считая $M_{И2} \approx 0$:

$$\overline{R_{12}^t} BC - P_{И2} EC = 0,$$

откуда

$$\overline{R_{12}^t} = P_{И2} EB/BC = 230 \cdot 7/180 = 878 \text{ Н.}$$

Строим план сил для двухповодковой группы 2–3 в целом (рисунок 6.15), $\mu_p = 98,1 \text{ Н/мм}$ согласно векторному уравнению:

$$\overline{R_{12}^n} + \overline{R_{12}^t} + \overline{P_{И2}} + \overline{P_{И3}} + \overline{P_3} + \overline{R_{03}} = 0.$$

Из плана сил определяем величины и направления сил R_{12}^n и R_{03} , а также полной реакции $\overline{R_{12}} = \overline{R_{12}^t} + \overline{R_{12}^n}$.

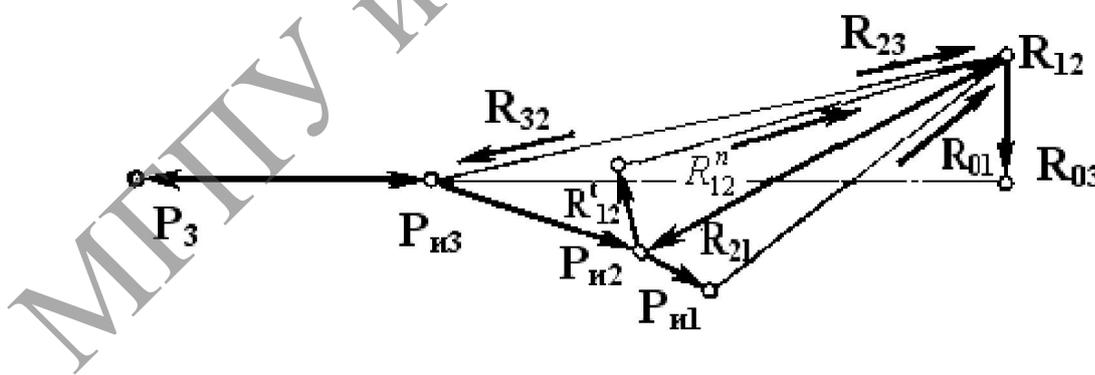


Рисунок 6.15 – План сил групп 2–3

Так как три силы ($\overline{P_3} + \overline{P_{И3}}$), $\overline{R_{03}}$ и $\overline{R_{23}}$, действующие на звено 3, должны пересекаться в одной точке C , то линия действия реакции $\overline{R_{03}}$ должна пройти через эту точку C (рисунок 6.16).

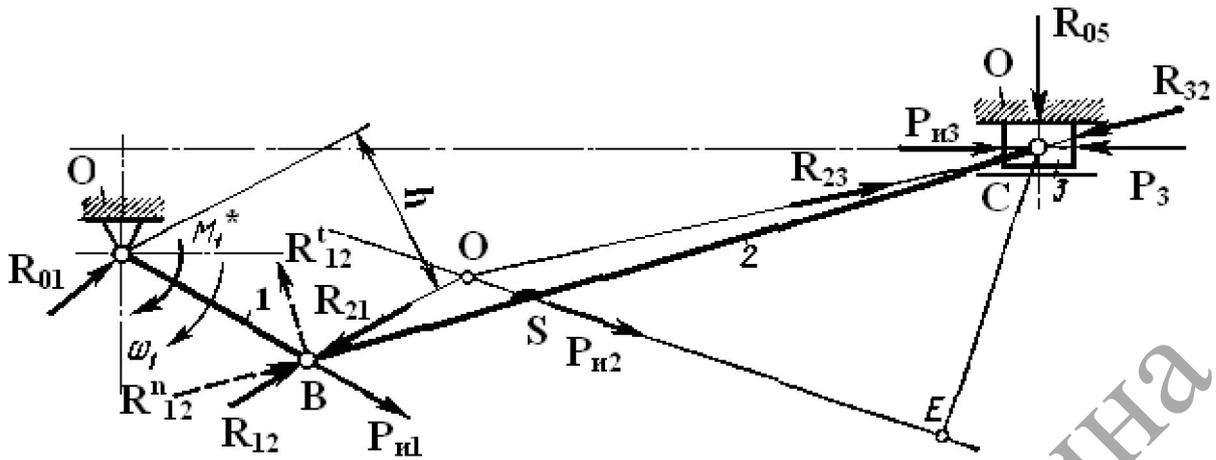


Рисунок 6.16 – План сил группы 1–2

Реакции \overline{R}_{32} или \overline{R}_{23} во вращательной паре могут быть определены из плана сил для группы 2–3 (рисунок 6.14), если в нем геометрически сложить все силы, действующие на звено 2: $\overline{R}_{12} + \overline{P}_{И2} + \overline{R}_{32} = 0$, или же геометрически сложить все силы, действующие на звено 3: $\overline{R}_{23} + \overline{P}_{И3} + \overline{P}_3 + \overline{R}_{03} = 0$, причем $\overline{R}_{32} = -\overline{R}_{23}$.

Можно отметить, что три силы \overline{R}_{12} , $\overline{R}_{И2}$ и \overline{R}_{32} , действующие на звено 2, должны пересечься в одной точке O (рисунок 6.15). На входное звено 1 действуют: сила инерции $\overline{P}_{И1}$, сила \overline{R}_{21} со стороны звена 2 и сила \overline{R}_{01} со стороны неподвижного звена ($\overline{P}_{И1}$ задана; \overline{R}_{21} известна, так как $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$; сила \overline{R}_{01} неизвестна ни по величине, ни по направлению).

Строя план сил (рисунок 6.22), действующих на звено 1, согласно векторному уравнению $\overline{R}_{21} + \overline{P}_{И1} + \overline{R}_{01} = 0$, определяем величину и направление силы \overline{R}_{01} .

Искомый приведенный (движущий) момент M_1^* определяем из уравнения моментов относительно оси A :

$$M_1^* = R_{21}^h = 430 \cdot 0,043 = 181,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ниже даны абсолютные значения всех сил (Н), действующих на звенья механизма, и приведенного момента (Н · м):

Звено 1				Звено 2			Звено 3			
M_1^*	$P_{И1}$	R_{01}	R_{21}	R_{12}	$P_{И2}$	P_{32}	R_{23}	P_3	$P_{И3}$	R_{03}
181,3	790	3 820	4 220	4 220	3 256	5 980	5 980	8 826	2 981	1 275

Задание 2: для кривошипно-ползунного механизма двигателя (рисунок 6.17, а, $\mu_e = 0,004$ м/мм) с помощью рычага Н. Е. Жуковского (рисунок 6.17, б) определить на входном звене I приведенный момент M_1^* . Заданные силы, действующие на звенья механизма, указаны в задаче 1.

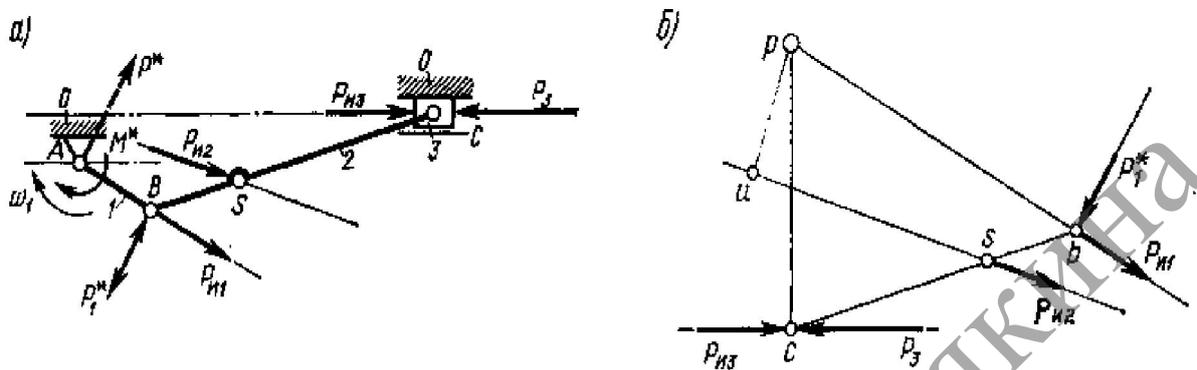


Рисунок 6.17 – Кривошипно-ползунный механизм двигателя

Решение: предварительно представим момент M_1^* в виде пары сил P^* с плечом AB (рисунок 6.17, а). Сила $P^* = M_1^*/l_{AB}$ и является искомой.

Строим в произвольном масштабе план повернутых на 90° скоростей механизма (рисунок 6.17, б) и переносим на этот план заданные силы $\overline{P_1^*}$ и $\overline{P_3}$ и силы инерции $\overline{P_{12}}$ и $\overline{P_{13}}$, действующие на механизм, прикладывая их в соответствующих точках плана: силы $\overline{P_3}$ и $\overline{P_{13}}$ – в точку c , силу $\overline{P_{12}}$ – в точку s и силу $\overline{P_{11}}$ – в точку b .

Приведенную силу P_1^* приложим в точке b под углом 90° к отрезку \overline{Pb} , изображающему скорость v_B . Сила $\overline{P_1^*}$ на плане скоростей будет приложена в полюсе P , момента относительно этого полюса не дает и на рисунке не изображена.

Составим уравнение моментов всех перенесенных на план скоростей сил относительно полюса P :

$$P_1^* pb + (P_3 - P_{13}) pc - P_{12} pu = 0.$$

Откуда

$$P_1^* = [P_{12} pu - (P_3 - P_{13}) pc] / (pb) =$$

$$= [(8\ 826 - 2\ 981) \cdot 75 + 2\ 256 \cdot 36] / 100 = -3\ 570 \text{ Н.}$$

Искомый приведенный момент $M_1^* = P_1^* / l_{AB} = 3\ 570 \cdot 0,05 = 178,5 \text{ Н.}$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: в задачах для самостоятельного решения 1, 2, 3, 4 и 5 предыдущей работы № 6 определить приведенную силу методом Жуковского и сравнить полученные результаты с величинами, полученными методом планов сил.

Практическая работа № 7.
РЕГУЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИНЫ

Исследование движения машины

Приведенная масса и приведенный момент инерции

Приведенной массой m_n называется такая условная масса, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии всего механизма.

Следовательно,
$$m_n = \frac{2E_k}{v_A^2}, \quad (7.1)$$

где E_k – кинетическая энергия всего механизма;

v_A – скорость точки приведения (в нашем случае это точка A).

Выражение для кинетической энергии механизма в общем случае может быть записано так:

$$E_k = E_{kn} + E_{ke} + E_{kcl} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_k \frac{J_k \omega_k^2}{2} + \sum_j \left(\frac{J_j \omega_j^2}{2} + \frac{m_j v_j^2}{2} \right), \quad (7.2)$$

где E_{kn} – кинетическая энергия всех звеньев, совершающих поступательное движение;

E_{ke} – кинетическая энергия всех звеньев, совершающих вращательное движение;

E_{kcl} – кинетическая энергия всех звеньев, совершающих сложное плоское движение.

Для приведенной массы получим выражение:

$$m_n = \sum_i m_i \left(\frac{v_i}{v_A} \right)^2 + \sum_k J_k \left(\frac{\omega_k}{v_A} \right)^2 + \sum_j \left(J_j \left(\frac{\omega_j}{v_A} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_j}{v_A} \right)^2 \right). \quad (7.3)$$

Основные свойства приведенной массы:

1) приведенная масса всегда положительна (т. к. она зависит от квадратов отношений скоростей);

2) приведенная масса для рычажных механизмов – величина переменная (т. к. скорости точек для каждого положения механизма неодинаковы);

3) приведенная масса для зубчатых механизмов – величина постоянная (т. к. угловые скорости звеньев постоянны);

4) приведенная масса зависит только от взаимного положения звеньев механизма и не зависит от истинной скорости движения.

Если звено приведения совершает вращательное движение, то обычно все массы и моменты инерции звеньев заменяют приведенным моментом инерции.

Приведенным моментом инерции J_n называется такой условный момент инерции, который создает во время вращения звена приведения кинетическую энергию, равную кинетической энергии всего механизма, т. е.

$$J_n = \frac{2E_k}{\omega_1^2}, \quad (7.4)$$

где ω_1 – угловая скорость звена приведения.

По аналогии с приведенной массой получим выражение для приведенного момента инерции:

$$J_n = \sum_i m_i \left(\frac{v_i}{\omega_1} \right)^2 + \sum_k J_k \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 + \sum_j \left(J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_j}{\omega_1} \right)^2 \right) \quad (7.5)$$

Свойства приведенного момента инерции такие же, как и приведенной массы.

Новая форма уравнения движения

Пользуясь понятием приведенной массы m_n и приведенной силы F_n , движение механизма машины можно рассматривать как движение звена приведения под действием приложенных к нему приведенных сил или моментов.

Тогда уравнение движения машины можно записать так:

$$\frac{m_{n2} v_2^2}{2} - \frac{m_{n1} v_1^2}{2} = \int_{S_1}^{S_2} (F_{d.n.} - F_{c.n.}) dS, \quad (7.6)$$

где v_1 и v_2 – скорости звена приведения;

m_{n1} и m_{n2} – приведенные массы, соответственно, для 1-го и 2-го положения механизма,

или так:

$$\frac{J_{n2} \omega_2^2}{2} - \frac{J_{n1} \omega_1^2}{2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (M_{d.n.} - M_{c.n.}) d\phi, \quad (7.7)$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости звена приведения;

J_{n_1} и J_{n_2} – моменты инерции относительно оси вращения соответственно, для 1-го и 2-го положения механизма;

$M_{\partial.n.}$ и $M_{c.n.}$ – приведенные к звену приведения движущий момент и момент сопротивления.

Уравнение движения машины может быть также представлено в дифференциальной форме:

$$dE_k = d(A_{\partial.n.} - A_{c.n.}) = (M_{\partial.n.} - M_{c.n.})d\varphi,$$

откуда
$$M_{\partial.n.} - M_{c.n.} = \frac{dE_k}{d\varphi}$$

или
$$M_{\partial.n.} - M_{c.n.} = \frac{d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right)}{d\varphi},$$

где $d(A_{\partial.n.} - A_{c.n.})$ – элементарная избыточная работа приведенных сил;

$d\varphi$ – элементарное угловое перемещение звена приведения;

dE_k – элементарное приращение кинетической энергии машины.

Принимая во внимание, что приведенный момент инерции J_n в общем случае переменный и является функцией координаты φ , имеем:

$$\frac{d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right)}{d\varphi} = \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} + J_n \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi};$$

$$\frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\omega} \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2\omega}{2d\omega} \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$M_{\partial.n.} - M_{c.n.} = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (7.8)$$

Аналогично через приведенные движущую силу и силу сопротивления уравнение движения в дифференциальной форме имеет вид:

$$F_{\partial.n.} - F_{c.n.} = m_n \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} \frac{dm_n}{dS}. \quad (7.9)$$

Графоаналитический метод исследования движения машины

Задачей исследования является определение закона движения исполнительного органа, если заданы движущие силы и силы полезных сопротивлений.

Конечным **результатом исследования** является определение скорости и ускорения звена приведения, а также времени движения.

Силы движущие F_d и силы полезных сопротивлений $F_{n.c.}$ могут зависеть как от положения ведущего звена, так и от скорости этого звена. Массы и моменты инерции могут быть постоянными или переменными. Поэтому исследование движения машины представляет собой достаточно сложную задачу.

Для ее решения составляют соответствующие уравнения движения, после решения которых (аналитическим или графоаналитическим методом) могут быть определены истинные значения V , a , и t .

Для упрощения расчетов используют **принцип приведения** сил и масс, т. е. задача исследования машины (механизма) сводится к исследованию одного звена приведения.

Ввиду того что законы изменения сил, приложенных к машине, достаточно сложны, аналитическое решение уравнений движения не всегда возможно. В этих случаях применяют графоаналитические методы.

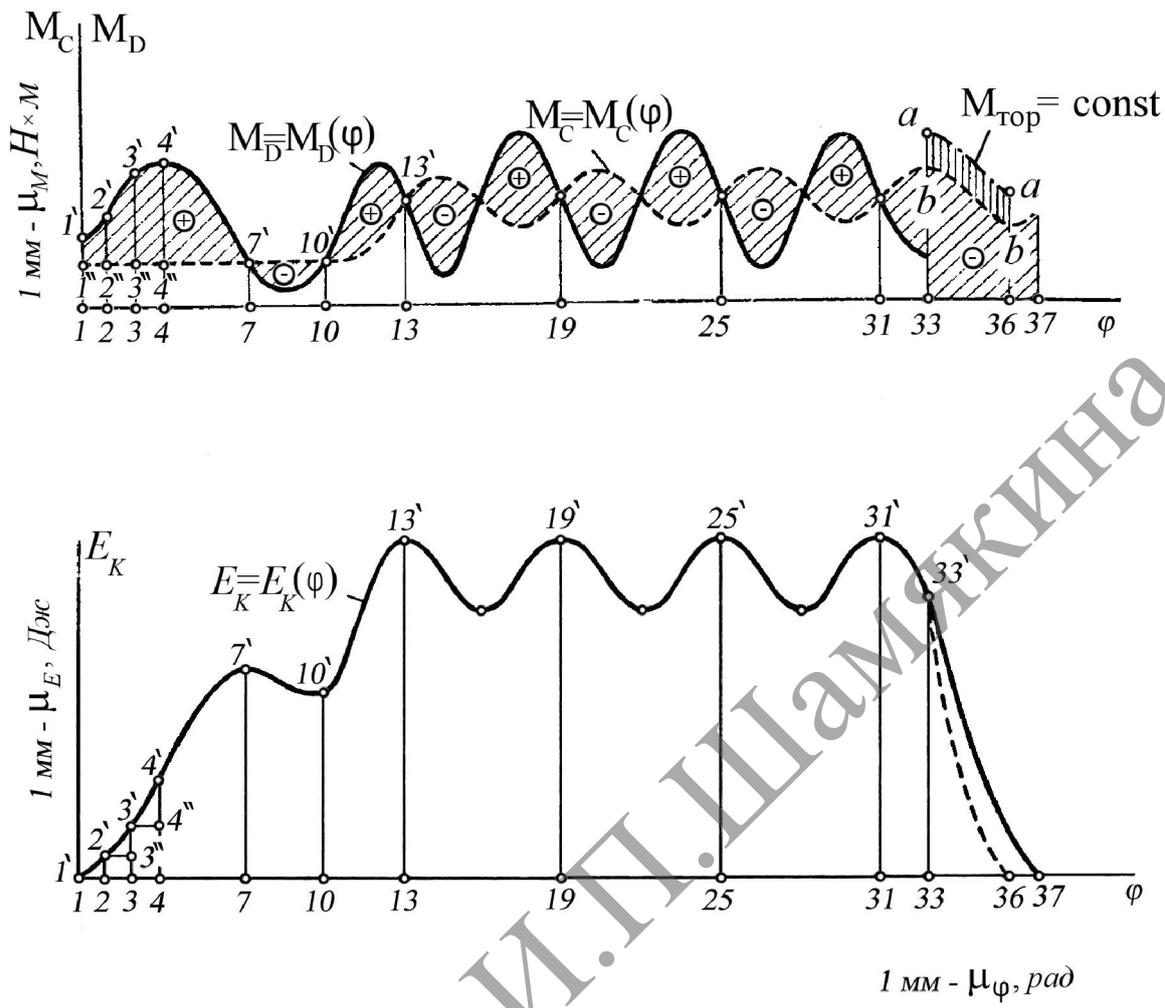
Графоаналитические методы решения уравнений движения механизма получили широкое применение еще и потому, что в большинстве технических задач приведенный момент движущих сил, приведенный момент сил сопротивления и приведенный момент инерции задаются в виде графиков.

Рассмотрим *метод, основанный на уравнении изменения кинетической энергии*. Как известно, квадрат угловой скорости звена приведения пропорционален отношению $\frac{E_k}{J_n}$, следовательно,

$$\omega^2 = \frac{2E_k}{J_n}. \quad (7.10)$$

Используем диаграмму $E_k = E_k(J_n)$, устанавливающую связь между кинетической энергией E_k и приведенным моментом инерции J_n , для определения угловой скорости звена приведения ω . Рассмотрим случай, когда приведенные моменты сил являются функциями угла поворота φ звена приведения.

Пусть приведенный момент M_D задан графиком $M_D = M_D(\varphi)$ (рисунок 7.1, а, сплошная линия), момент M_C задан графиком $M_C = M_C(\varphi)$ (рисунок 7.1, а, штриховая линия).



- а) графики моментов движущих сил и сил сопротивления;
- б) график кинетической энергии механизма

Рисунок 7.1 – К графоцисленному решению уравнения движения в форме изменения кинетической энергии

Работа приведенного момента M_D на выбранном интервале равна

$$A_{M_D} = \int_0^{\varphi} M_D d\varphi$$

где φ – угол поворота звена приведения. Величина этой работы выражается произведением площади, ограниченной кривой $M_D = M_D(\varphi)$, осью φ и начальной и конечной ординатами, на соответствующие масштабы.

Работа приведенного момента M_C равна:

$$A_{M_C} = \int_0^{\varphi} M_C d\varphi$$

и выражается произведением площади, ограниченной кривой $M_C = M_C(\varphi)$, осью φ , начальной и конечной ординатами, на соответствующие масштабы.

Приращение кинетической энергии механизма за какой-либо промежуток времени, согласно уравнению кинетической энергии, выражается разностью площадей кривых $M_D = M_D(\varphi)$ и $M_C = M_C(\varphi)$, помноженной на соответствующие масштабы. Таким образом, применив к исходным диаграммам метод графического интегрирования, можно построить график изменения кинетической энергии в функции угла φ $E_K = E_K(\varphi)$ (рисунок 7.1, б).

Момент инерции J_n задан графиком $J_n = J_n(\varphi)$ (рисунок 7.2). График задан для одного оборота звена приведения, т. к. изменение J_n носит циклический характер.

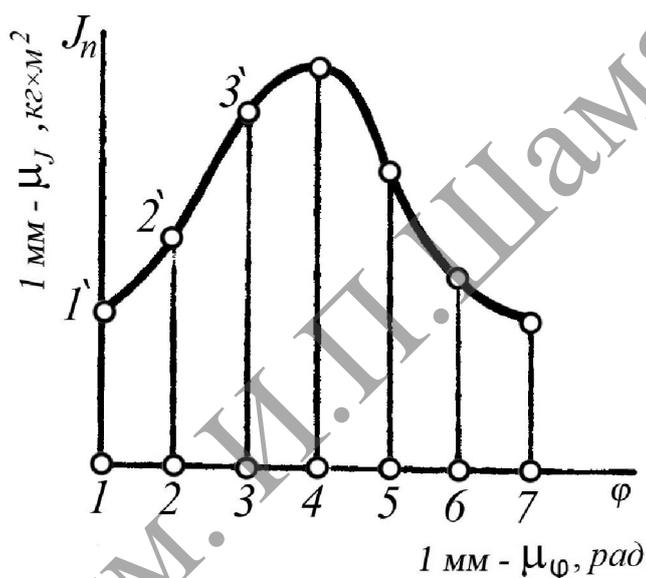
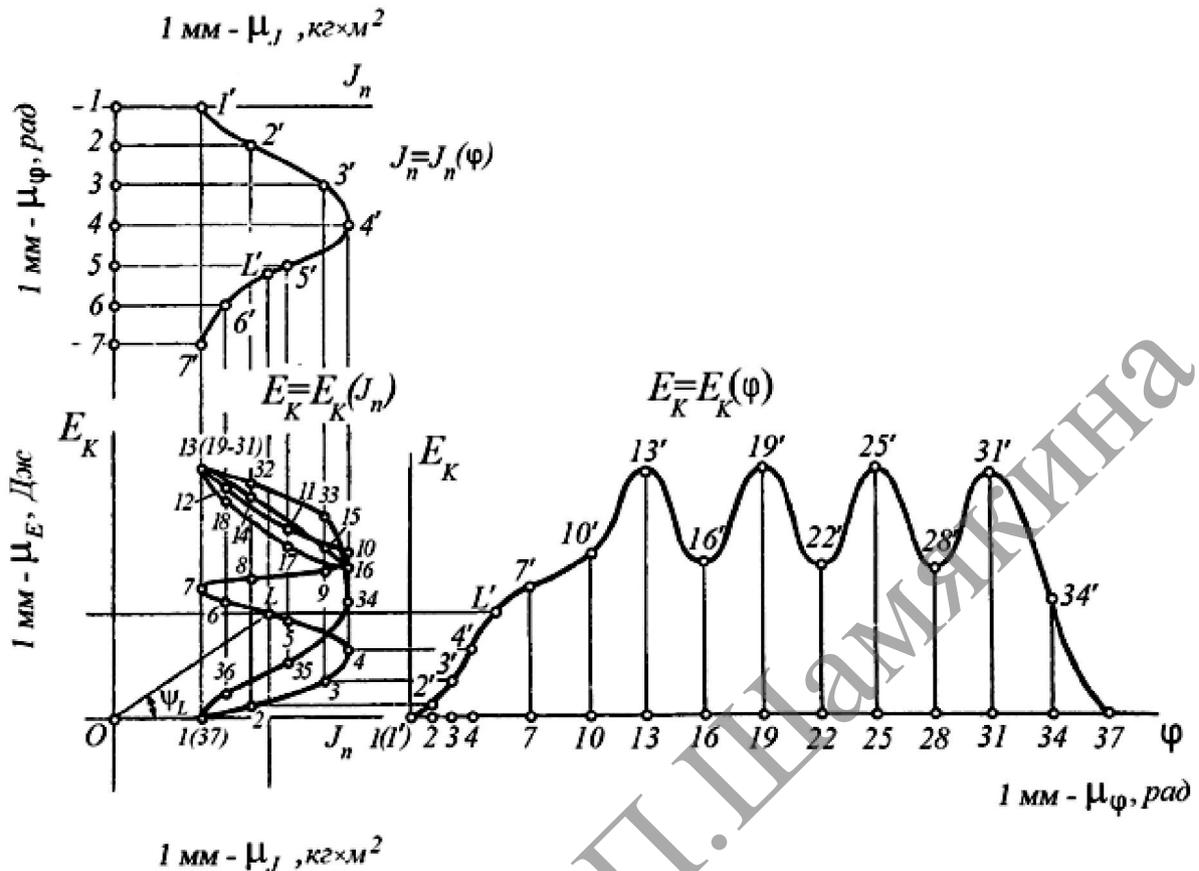


Рисунок 7.2 – График приведенного момента инерции

Имея графики $E_K = E_K(\varphi)$ и $J_n = J_n(\varphi)$, путем исключения параметра φ строим график $E_K = E_K(J_n)$ (рисунок 7.3).

На участке установившегося движения 13–31 кривая $E_K = E_K(J_n)$ должна быть замкнутой, так как одни и те же значения величин E_K и J_n периодически повторяются через каждый цикл. Часть кривой $E_K = E_K(J_n)$, соответствующая времени разбега 1–13, не совпадает с частью кривой, соответствующей времени выбега 31–37, так как характер кривой $E_K = E_K(\varphi)$ на этих участках различен. Кривая $E_K = E_K(J_n)$ носит название **диаграммы Виттенбауэра** по имени ученого, впервые рассмотревшего эту зависимость.



- а) диаграмма приведенного момента инерции в функции угла поворота;
 б) диаграмма кинетической энергии в функции приведенного момента инерции;
 в) диаграмма кинетической энергии в функции угла поворота

Рисунок 7.3 – К определению скорости звена привода

Выберем на кривой $E_K = E_K(J_n)$ произвольную точку L и соединим эту точку с точкой O – началом координат. Обозначим угол, образованный прямой OL с осью абсцисс через ψ_L . Так как по оси абсцисс отложен приведенный момент инерции J_{nL} в масштабе μ_J , соответствующий точке L , а на оси ординат – кинетическая энергия E_{KL} , соответствующая той же точке, в масштабе μ_E , то отношение этих величин даст тангенс угла ψ_L наклона прямой OL к оси OJ_n :

$$\frac{E_{KL}}{J_{nL}} = \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_L. \quad (7.11)$$

Если соединить последовательно все точки кривой $E_K = E_K(J_n)$ с точкой O , определить последовательно все углы $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ и подставить значения тангенсов этих углов в равенство (7.11), то, воспользовавшись формулой (7.1), можно получить значения квадратов угловых скоростей ω звена привода для всех положений механизма. Имеем:

$$\omega_1^2 = 2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1;$$

$$\omega_2^2 = 2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2. \quad (7.12)$$

Из формул (7.12) следует, что угловые скорости ω звена приведения пропорциональны корням квадратным из тангенсов углов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, т. е.

$$\omega_1 = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2}. \quad (7.13)$$

Таким образом, определяются значения угловой скорости ω звена приведения механизма. Пользуясь этими значениями, можно построить график угловой скорости ω звена приведения в функции угла φ , т. е. для каждого из выбранных положений механизма (рисунок 7.4).

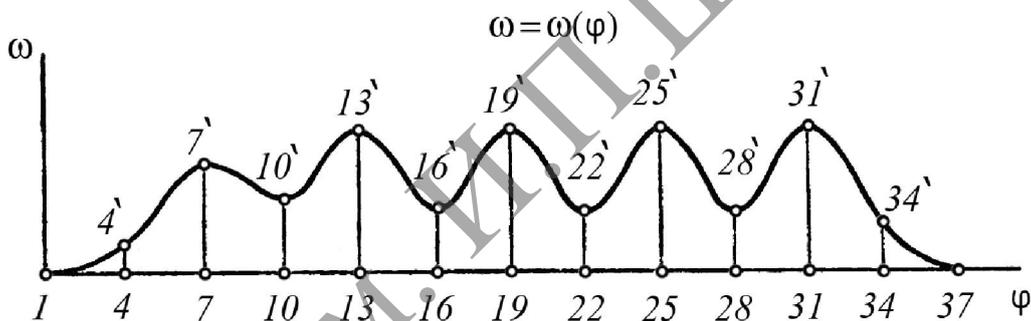


Рисунок 7.4 – График угловой скорости звена приведения в функции его угла поворота

При этом наибольшая угловая скорость ω_{\max} будет равна:

$$\omega_{\max} = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\max}}. \quad (7.14)$$

Точно так же наименьшую угловую скорость определяют из уравнения:

$$\omega_{\min} = \sqrt{2 \frac{\mu_E}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{\min}}. \quad (7.15)$$

В качестве одного из результатов исследования мы назвали *определение времени движения*. Здесь имеется в виду не время движения от и до, а установление взаимозависимости угла поворота звена привода и времени движения.

На рисунке 7.1, а угол Φ , соответствующий полному времени движения механизма, равен сумме углов: $\Phi = \varphi_p + \varphi_{y\partial} + \varphi_0$, где угол φ_p соответствует времени разбега, $\varphi_{y\partial}$ – угол времени установившегося движения и φ_0 – угол времени выбега. Угол φ_0 соответствует времени одного оборота звена привода.

График времени движения t в функции угла φ может быть построен, если воспользоваться формулой $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, так как любой промежуток времени от начала движения, соответствующего времени t_1 , до рассматриваемого момента времени t_L равен:

$$t_L - t_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (7.16)$$

Интеграл в правой части формулы можно определить графически, если построить график величины $\frac{1}{\omega}$ как функции угла φ .

По графикам $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$ можно построить график $\omega = \omega(t)$.

Графическое дифференцирование функции $\omega = \omega(t)$ дает возможность определить угловое ускорение звена привода ε .

Зная угловую скорость ω и угловое ускорение ε звена привода, можно определить скорости и силы инерции отдельных звеньев, а также провести полный силовой расчет механизма в условиях неравномерно вращающегося звена привода.

Таким образом, с помощью диаграммы $E_K = E_K(J_n)$ и последующих графочисленных расчетов может быть полностью исследован вопрос о движении агрегата при силах, зависящих от положения звена привода.

Если движущие силы и силы сопротивления являются функциями скорости (вентиляторы, мешалки, ротативные насосы и т. д.), то применяют другие методы (метод П. А. Зиновьева, Н. Е. Жуковского).

Итак, **методика графоаналитического метода исследования механизмов** предполагает следующую последовательность действий:

- по имеющимся графикам приведенных моментов движущих сил и сил сопротивления методом графического интегрирования строят график изменения кинетической энергии;
- по графикам кинетической энергии и приведенных моментов инерции путем исключения параметра φ строят график энергомасс (диаграмму Виттенбауэра);

- по графику энергомасс определяют скорость звена приведения в функции φ и строят график угловой скорости $\omega = \omega(\varphi)$;
- для определения времени движения в функции φ строят график $\frac{1}{\omega}(\varphi)$ и методом графического интегрирования получают зависимость $t = t(\varphi)$;
- по графикам $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$ путем исключения параметра φ строят график $\omega = \omega(t)$. Методом графического дифференцирования графика $\omega = \omega(t)$ определяют угловое ускорение звена приведения ε .

Неравномерность хода машины

Согласно уравнению движения машины, истинная скорость определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_{n.d.} - M_{n.c.}) d\varphi}{J_n}}$$

Из данного уравнения видно, что скорость зависит от двух величин: приведенного момента сил и приведенного момента инерции.

В общем случае силы, приложенные к машине, и их приведенные массы (приведенные моменты инерции), переменны. Поэтому и скорость звена приведения в период установившегося движения машины переменна и изменяется внутри цикла периодически, колеблясь между максимальным ω_{\max} и минимальным ω_{\min} значениями угловой скорости (рисунок 7.5).

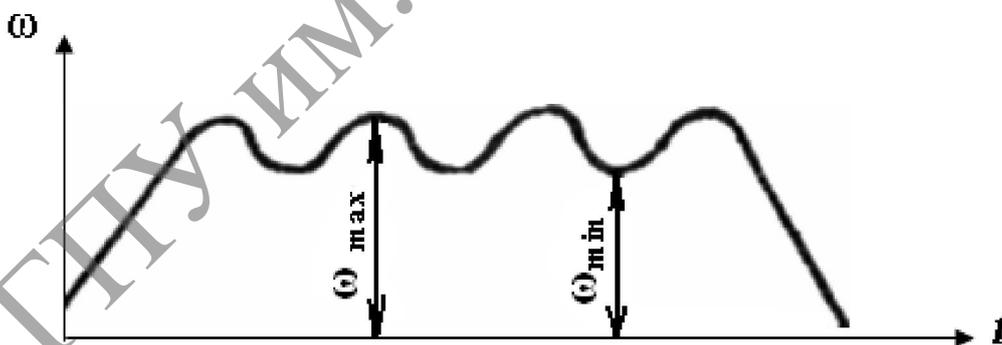


Рисунок 7.5 – К неравномерности движения машины

Итак, неравномерность движения машины вызывается двумя причинами:

- 1) несоответствием между приведенными моментами движущих сил и сил сопротивления внутри цикла;
- 2) непостоянством приведенного момента инерции (приведенной массы).

Следует отметить, что для ряда механизмов (зубчатые механизмы, токарные станки), у которых $J_n = const$, вторая причина отсутствует.

Для оценки неравномерности хода машины, т. е. пределов колебаний скорости, служит коэффициент неравномерности хода δ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}}, \quad (7.17)$$

где ω_c – средняя скорость машины, под которой понимается такая постоянная скорость машины, двигаясь с которой она за время цикла проходит путь, равный циклу.

В реальных машинах скорости колеблются относительно среднего значения в ограниченных пределах, так что среднюю скорость ω_{cp} можно заменить средним арифметическим предельных значений скоростей:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (7.18)$$

В расчетах также используют значение номинальной частоты вращения, которая соответствует средней угловой скорости, т. е.:

$$\omega_{\text{cp}} \approx \omega_n = \frac{\pi n_n}{30}.$$

Величина коэффициента неравномерности δ определяется необходимостью обеспечения оптимальных условий выполнения заданного технологического процесса. Например, для генераторов переменного тока $\delta = \frac{1}{20} \dots \frac{1}{50}$, для прессов и ножниц – $\delta = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{10}$. Чем меньше δ , тем более равномерно (плавно) работает машина, и наоборот: при больших значениях δ возникают дополнительные динамические нагрузки, что неблагоприятно сказывается на работе машины.

Из соотношений (7.10) и (7.11) следует:

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{cp}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \quad \omega_{\min} = \omega_{\text{cp}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right); \quad (7.19)$$

$$\delta = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{\text{cp}}^2}; \quad (7.20)$$

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\delta \omega_{\text{cp}}^2. \quad (7.21)$$

Регулирование периодических колебаний угловой скорости

Основной задачей регулирования хода машин является обеспечение:

- заданной скорости рабочего звена;
- коэффициента неравномерности хода машины δ .

Из уравнения (7.10) следует, что при заданных законах изменения сил движущих и сил сопротивления амплитуда периодических колебаний угловой скорости будет тем меньше, чем больше приведенный момент инерции машины. Для того чтобы приблизить движение звена приведения к равномерному, надо увеличить приведенный момент инерции. Практически это выполняют, увеличивая массы ротора или устанавливая на ведущем валу машины маховое колесо (маховик).

Вывод: в машинах, имеющих периодические колебания угловой скорости, регулирование скорости достигается за счет установки дополнительных масс (маховика) – рисунок 7.6

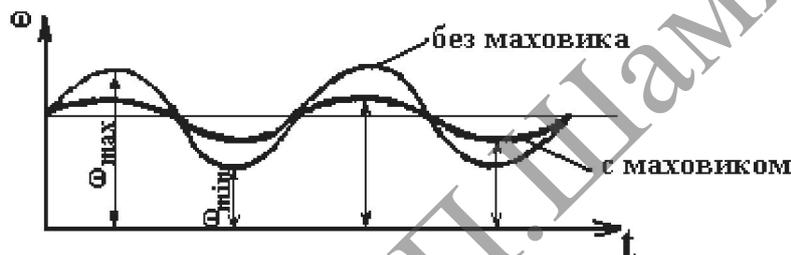


Рисунок 7.6 – Регулирование периодической угловой скорости

Установим зависимость между требуемым коэффициентом неравномерности хода и моментом инерции маховика.

Кинетическая энергия всякого механизма есть сумма кинетических энергий его звеньев. При наличии в механизме маховика его кинетическая энергия обычно составляет примерно 90% от всей кинетической энергии механизма. Примем в первом приближении, что вся кинетическая энергия механизма состоит только из кинетической энергии одного маховика.

Тогда уравнение движения примет вид:

$$A_d - A_c = E_{\max} - E_{\min} = \frac{J_M}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2). \quad (7.22)$$

Обозначим разность работ движущих сил и сил сопротивления как избыточную работу: $A_{изб} = A_d - A_c$.

Тогда:

$$A_{изб} = \frac{J_M}{2} (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = J_M \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min})}{2}.$$

Откуда
$$J_M = \frac{A_{изб}}{\delta \omega_{cp}^2}. \quad (7.23)$$

Маховик обычно выполняют в виде диска с массивным ободом. Пренебрегая весом спиц и ступицы, можно считать всю массу маховика распределенной в ободке (рисунок 7.7) по окружности диаметра D , равного среднему диаметру обода.

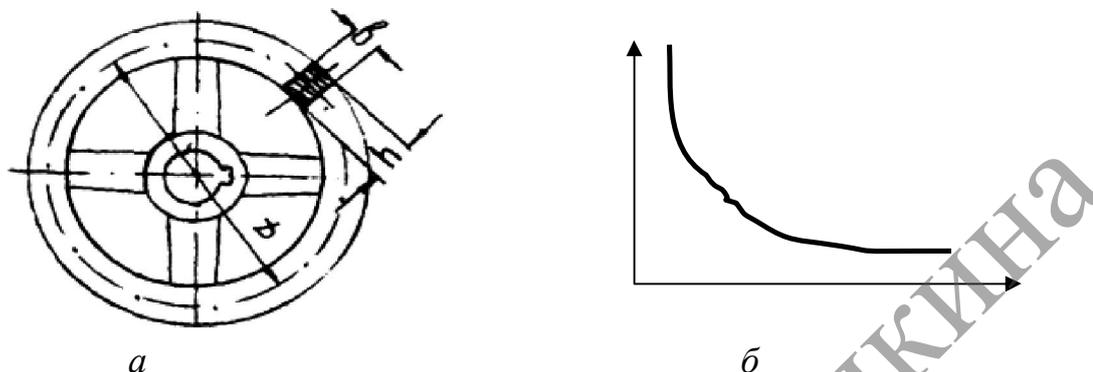


Рисунок 7.7 – К расчету маховика

При таком допущении можно написать:

$$J_M = m_M R^2 = \frac{GD^2}{4g}; \quad (7.25)$$

$$GD^2 = 4gJ_M. \quad (7.26)$$

Величину GD^2 называют **маховым моментом**.

Кривая зависимости момента инерции маховика J_M от коэффициента неравномерности хода δ имеет приближенно гиперболический характер (рисунок 7.7, б) и, следовательно, с приближением δ к нулю J_M быстро возрастает. Поэтому конструкторы иногда отказываются от меньших значений δ в пределах допустимых технологическим процессом, так как дальнейшее снижение δ ведёт к значительному увеличению размеров и веса маховика.

Средний диаметр обода маховика обычно принимают в 4–5 раз *большим радиуса кривошипа*. Вес обода маховика можно определить по формуле:

$$G = \frac{4gJ_M}{D^2}. \quad (7.26)$$

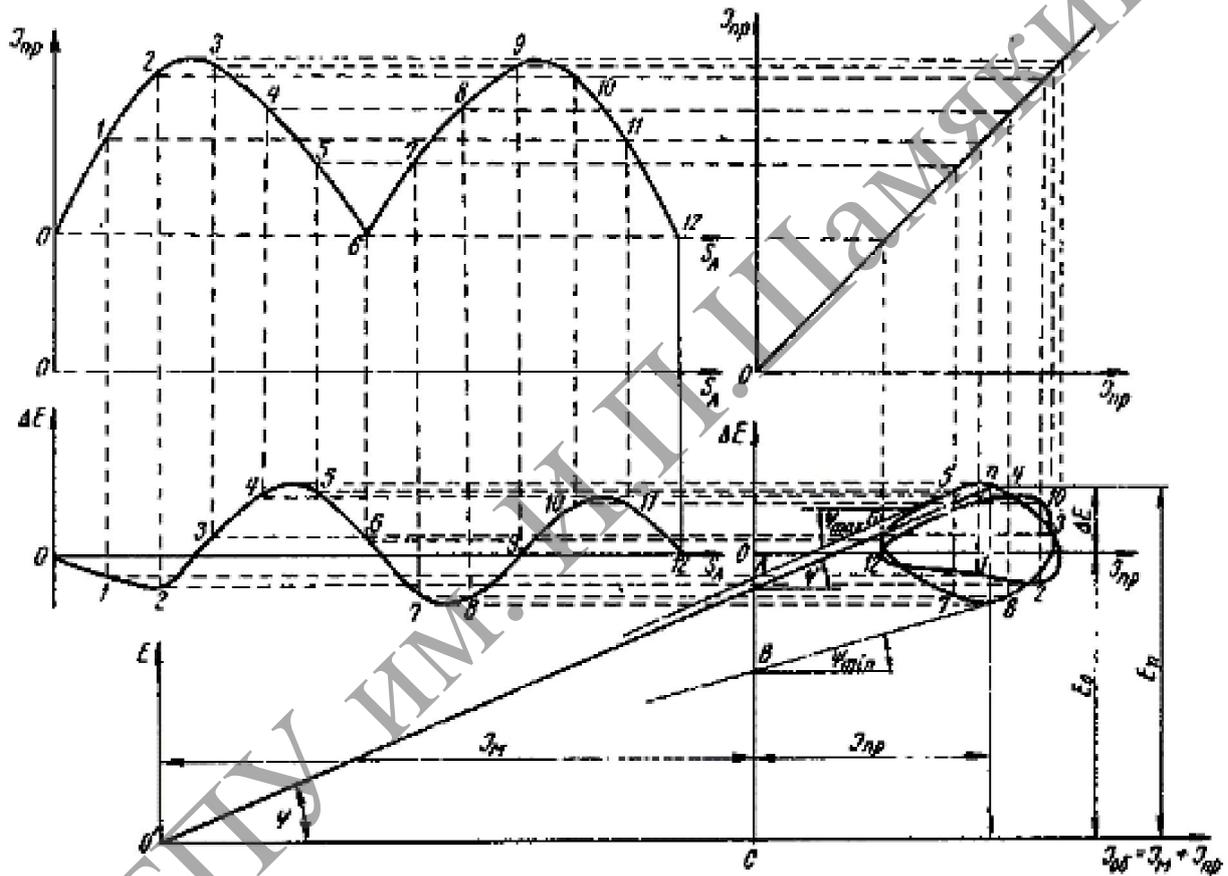
Место установки маховика в машине может быть различным:

- на валу кривошипа;
- на одном из промежуточных валов;
- на валу двигателя.

При установке маховика на быстроходном валу его вес и размеры значительно уменьшаются.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1: определить момент инерции маховика I_m , который необходимо посадить на вал кривошипа поперечно-строгального станка, чтобы обеспечить коэффициент неравномерности $\delta = 1/30$, по следующим данным: ход ползуна $5 H = 300$ мм, коэффициент изменения средней скорости $k = 2$, число оборотов кривошипа $n = 120$ об/мин, сила сопротивления (сопротивление резанию) $Q = 3\,000$ Н, приведенная (к ползуну) сила от всех вредных сопротивлений $F_{np} = 200$ Н.



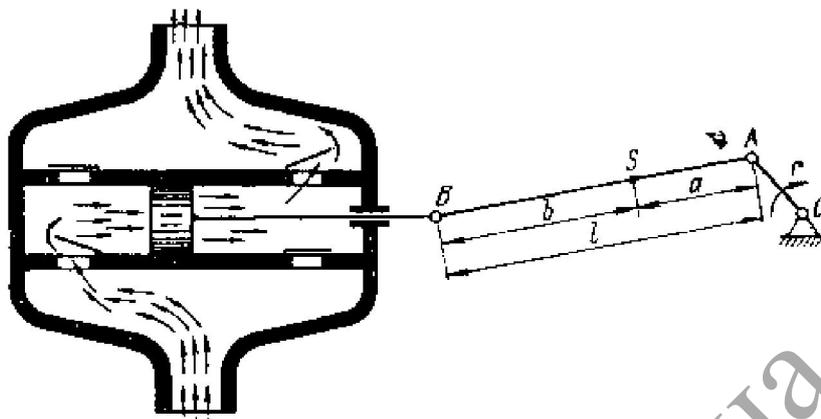
Ответ: $I_m = 118 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Задание 2: для привода рабочей машины необходима мощность N_p (от двигателя), равная $N_p = 110$ кВт, механический к. п. д. машины $\eta = 0,85$, число оборотов кривошипа $n_1 = 600$ об/мин. Требуется определить момент инерции маховика I_m , если избыточная работа $A_{изб}$ составляет $1/5$ полезной работы машины за один оборот кривошипа, а коэффициент неравномерности – $\delta = 1/40$.

Ответ: $I_m = 190 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Задание 3:

определить момент инерции I_M маховика насосной установки по следующим данным: диаметр цилиндра $D = 800$ мм, число оборотов кривошипа $n = 320$ об/мин,



длина кривошипа $r = 130$ мм, длина шатуна $l = 1\,000$ мм, расстояния до центра тяжести шатуна $a = 382$ мм, $b = 618$ мм, масса поступательно движущихся частей $m_n = 70$ кг, масса шатуна $m_{ш} = 137$ кг, момент инерции шатуна относительно центра тяжести $I_s = 23$ кг · м², давление воды $p = 5,88$ бар, коэффициент неравномерности $\delta = 1/40$.

Ответ: $I_M = 176,9$ кг · м².

Задание 4: определить приведенный момент инерции I_{np} (к валу I мотора) планетарного редуктора, кинематическая схема которого изображена на рисунке 7.8, по следующим данным: $z_1 = 108$; $I_1 = 0,18$ кг · м²; $z_2 = 26$; $I_2 = 0,0005$ кг · м²; $z_3 = 50$; $I_3 = 0,008$ кг · м²; $z_4 = 132$; $z_5 = 25$; $I_5 = 0,1$ кг · м² (вместе с водилом); $z_6 = 60$; $I_6 = 0,015$ кг · м².

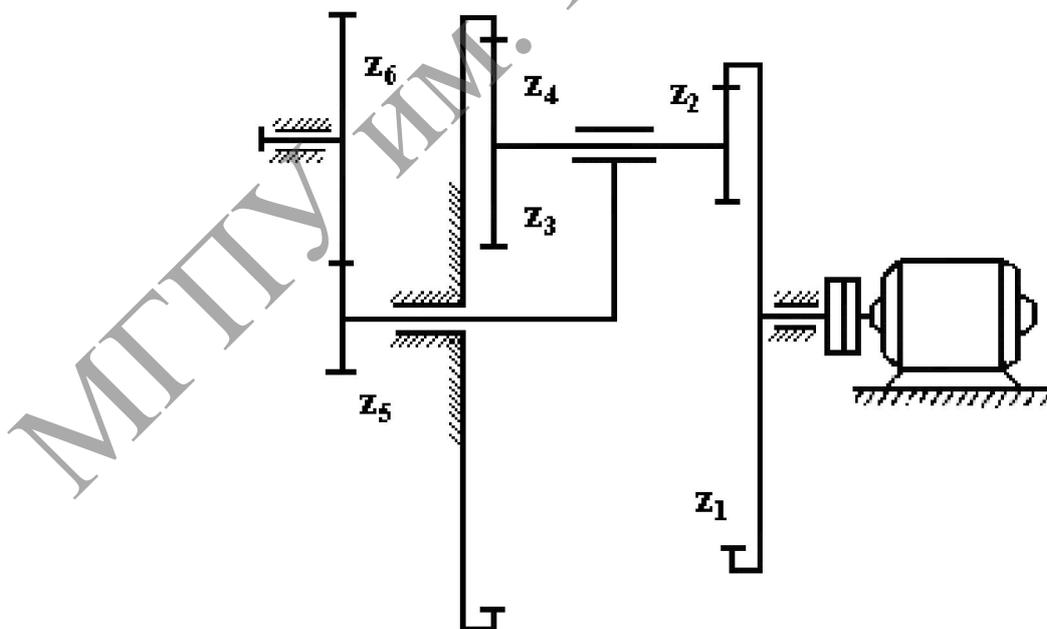
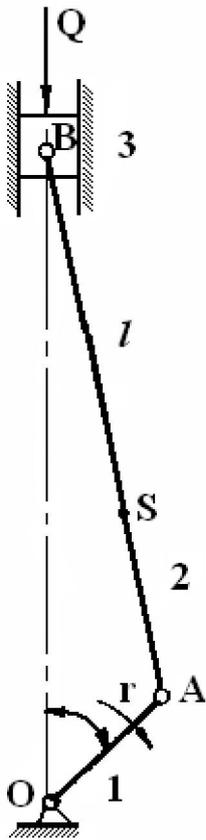


Рисунок 7.8 – Схема планетарного редуктора

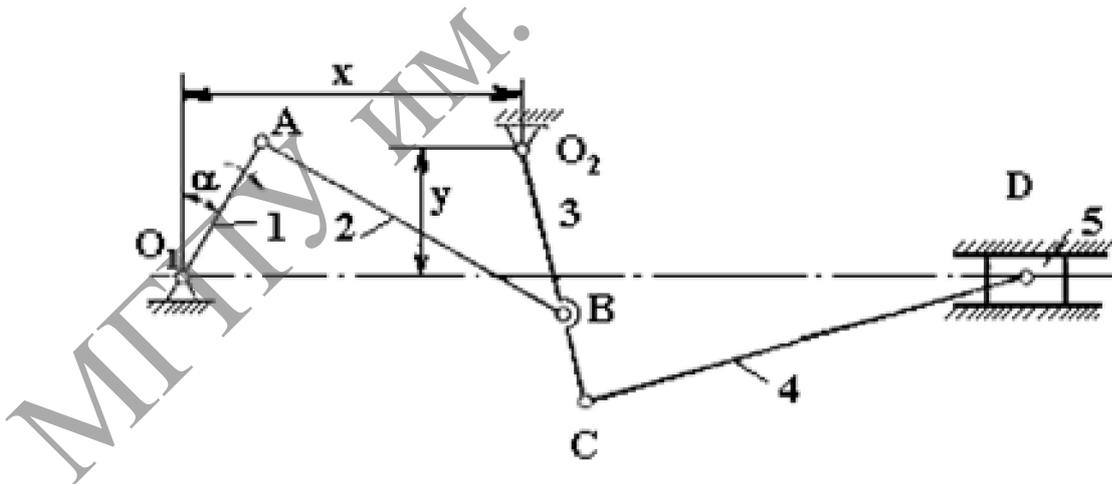
Ответ: $I_{np} = I_1 + (I_2 + I_3/i_{1,2}^2) + (I_5/i_{1,5}^2) + (I_6/i_{1,6}^2) = 1,8$ кг · м².

Задание 5: определить приведенную (к точке B) массу m_{np} и приведенный (к валу кривошипа) момент инерции I_{np} кривошипно-ползунного механизма для положения, указанного на схеме ($\alpha = 45^\circ$), по следующим данным: длина кривошипа $OA = 55$ мм, длина шатуна $AB = 200$ мм, центр тяжести S шатуна находится от центра шарнира A на расстоянии $AS = 65$ мм, момент инерции кривошипа $I_0 = 0,02$ кг \cdot м², масса шатуна $m_2 = 1$ кг, момент инерции шатуна относительно центра тяжести $I_S = 0,01$ кг \cdot м², масса поршня $m_3 = 0,6$ кг, кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 2800$ об/мин.

Ответ: $m_{np} = 14,74$ кг; $I_{np} = 0,0236$ кг \cdot м².



Задание 6: определить приведенную (к точке D) массу m_{np} и приведенный (к валу кривошипа) момент инерции I_{np} механизма конвейера ПК-6 для положения, указанного на схеме ($\alpha = 30^\circ$), по следующим данным: $O_1A = 150$ мм; $BO_2 = 165$; $AB = 330$; $CO_2 = 250$; $CD = 430$; $x = 325$; $y = 125$ мм; звенья имеют следующие массы: $m_1 = 9$ кг; $m_2 = 35$; $m_3 = 42$; $m_4 = 60$; $m_5 = 135$ кг, все звенья представляют собой стержни постоянного сечения с центром тяжести посередине.



Кривошип вращается равномерно со скоростью $n_1 = 120$ об/мин.

Ответ: $m_{np} = 215$ кг; $I_{np} = 23,4$ кг \cdot м².

Практическая работа № 8. **УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС**

При движении звеньев механизма (машины) в кинематических парах кроме статических усилий возникают динамические давления от сил инерции. Эти динамические давления являются источником дополнительных напряжений в звеньях механизма, дополнительных сил трения в кинематических парах, источником вибраций звеньев и вибраций машин на фундаменте. Поэтому при проектировании механизмов должна быть поставлена задача рационального подбора уравнивающих масс, обеспечивающих полное или частичное погашение добавочных давлений.

Различают *статическое*, *динамическое* и *полное* уравнивание вращающихся масс.

Для *статического уравнивания* необходимо соблюдение двух условий:

1) центр тяжести звена должен лежать на геометрической оси вращения, т. е. вектор результирующей силы инерции должен быть равен нулю: $\Sigma P_u = 0$;

2) наличие статической балансировки.

Первое условие выполняется на стадии конструирования, т. е. конструктор придает звену такую конфигурацию, чтобы ось вращения звена совпала с центром тяжести звена.

Выполнение второго условия – *статическая балансировка* – осуществляется практическим путем, поскольку звено, будучи теоретически уравновешенным, может иметь центр тяжести, не совпадающий с осью вращения – вследствие неоднородности материала, неточности изготовления и монтажа и т. д.

Статическое уравнивание обычно применяется для звеньев, имеющих небольшую длину по сравнению с диаметром (маховики, зубчатые колеса, диски пил и т. п.).

Для звеньев имеющих значительную длину (роторы, барабаны и т. п.), статическое уравнивание является уже недостаточным, так как становится существенным влияние момента сил инерции (т. е. мы должны уравнивать не только результирующую силу инерции, но и результирующий момент инерции). В этом случае применяется *динамическое уравнивание*.

Для динамического уравнивания также необходимо соблюдать два условия:

1) равенство нулю момента сил инерции (главного момента): $\Sigma M_u = 0$;

2) наличие динамической балансировки.

Полное уравнивание предполагает как статическое, так и динамическое равновесие вращающихся масс. В этом случае результирующая сила инерции и момент сил инерции должны быть равны нулю:

$$\Sigma P_u = 0; \quad \Sigma M_u = 0.$$

Статическое уравнивание одной вращающейся массы

Пусть имеем звено с осью вращения O и неуравновешенную массу m , расположенную на расстоянии r (рисунок 8.1). Звено вращается с переменной угловой скоростью ω . Наличие неуравновешенной массы m и неравномерность вращения приводят к появлению сил инерции:

- нормальной центробежной силы инерции – $P_u^n = m \omega^2 r$,
- тангенциальной силы инерции – $P_u^t = m \varepsilon r$.

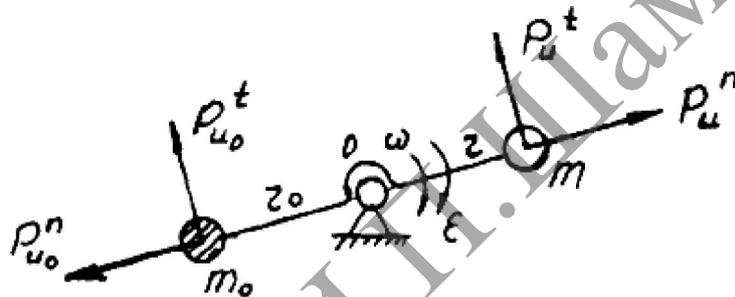


Рисунок 8.1 – Звено с неуравновешенной массой

Для их уравнивания на расстоянии r_0 противоположно радиусу размещаем уравнивающую массу m_0 (противовес), силы инерции которой:

$$P_{u0}^n = m_0 \omega^2 r_0,$$

$$P_{u0}^t = m_0 \varepsilon r_0.$$

При условии равновесия как нормальные, так и тангенциальные силы инерции должны давать в сумме 0.

Условие равновесия для нормальных сил инерции:

$$P_u^n + P_{u0}^n = 0$$

откуда $m r + m_0 r_0 = 0.$ (8.1)

То есть *условие равновесия соблюдается тогда, когда сумма статических моментов неуравновешенной и уравнивающей масс относительно оси вращения равна нулю.*

Для нахождения массы m_0 обычно задаются радиусом r_0 , т. е. выбираем его произвольно, тогда получаем

$$m_0 = m \frac{r}{r_0}. \quad (8.2)$$

Условие равновесия тангенциальных сил инерции:

$$P_u^t + P_{u0}^t = 0.$$

или
$$m \varepsilon r + m_0 \varepsilon r_0 = 0,$$

откуда получаем
$$m r + m_0 r_0 = 0.$$

Это же выражение (8.1) мы получили при уравнивании нормальных сил инерции. Таким образом, уравнивая нормальные силы инерции, мы автоматически уравниваем и тангенциальные силы инерции. Следовательно, для уравнивания звена достаточно уравновесить его при постоянной угловой скорости $\omega = const$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только нормальные (центробежные) силы инерции.

Статическая балансировка

Как было отмечено ранее, правильно спроектированная с точки зрения уравнивания деталь может оказаться неуравновешенной вследствие неоднородности материала, неточности изготовления, погрешности монтажа и т. д. Причем чем больше скорость, тем больше проявляется неуравновешенность. Чтобы это устранить, кроме теоретического уравнивания требуется практическое уравнивание, называемое *статической балансировкой*. Задача статической балансировки состоит в том, чтобы обеспечить совпадение центра тяжести детали с осью её вращения.

Статическая балансировка производится различными способами: на вращающихся роликах, на балансировочных весах. Кратко рассмотрим балансировку на призмах (рисунок 8.2).

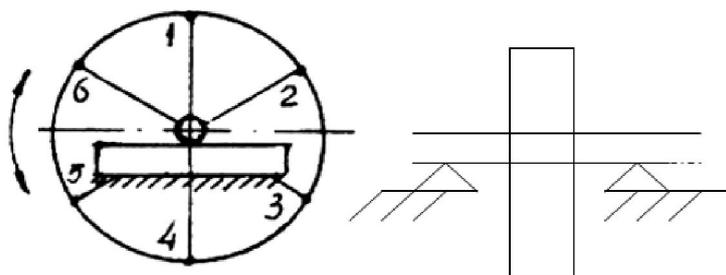


Рисунок 8.2 – К статической балансировке

Балансировка заключается в уравнивании детали до такого состояния, при котором деталь, будучи повернута на любой угол, остается в покое. Для этого окружность делят на шесть равных частей, затем устанавливают каждые два противоположных деления в горизонтальном положении и путем подвешивания грузиков (воск, замазка и т. д.) добиваются безразличного равновесия детали (она не должна проворачиваться).

Уравнивание масс, вращающихся в параллельных плоскостях

В качестве примера рассмотрим задачу об уравнивании барабана (рисунок 8.3), который имеет две неуравновешенные массы – m_1 и m_2 .

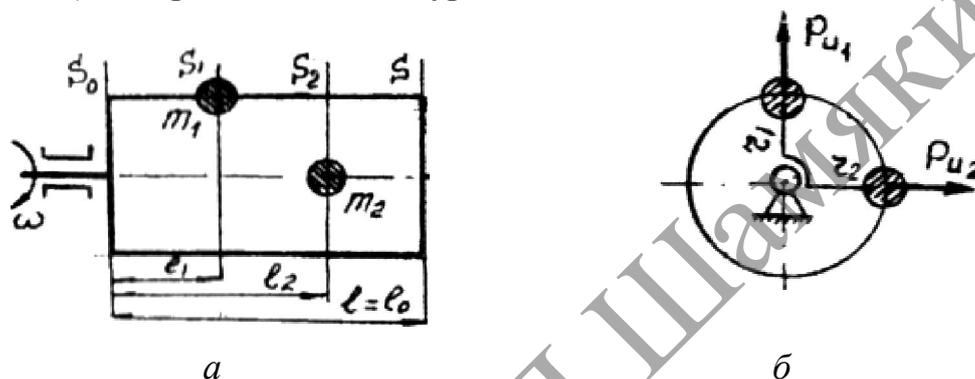


Рисунок 8.3 – К уравниванию масс, вращающихся в параллельных плоскостях

Пусть эти массы расположены в плоскостях S_1 и S_2 , перпендикулярных к оси вращения.

При $\omega = const$ силы инерции, развиваемые этими массами, будут равны:

$$P_{u1} = m_1 \omega^2 r_1;$$

$$P_{u2} = m_2 \omega^2 r_2.$$

Для наглядности торцевые плоскости барабана и плоскости, в которых расположены неуравновешенные массы, выделены отдельно (рисунок 8.4, а).

Статическое уравнивание

Согласно условию уравнивания масс, геометрическая сумма статических моментов должна быть равна нулю:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_0 r_0 = 0. \quad (8.3)$$

Построим план статических моментов: вектор $m r_0$ покажет направление того радиуса, на котором должна быть установлена

уравновешивающая масса m_0 (рисунок 8.4, б). Длину вектора измерим на плане и пересчитаем в масштабе. Задавшись r_0 , найдем m_0 . Уравновешивающая масса m_0 может быть установлена в любой точке по длине вала, необходимо только, чтобы произведение $m r_0$ удовлетворяло уравнению (8.3). Установим её в плоскость S .

Кроме этих сил необходимо уравновесить моменты сил инерции – т. е. произвести динамическое уравновешивание.

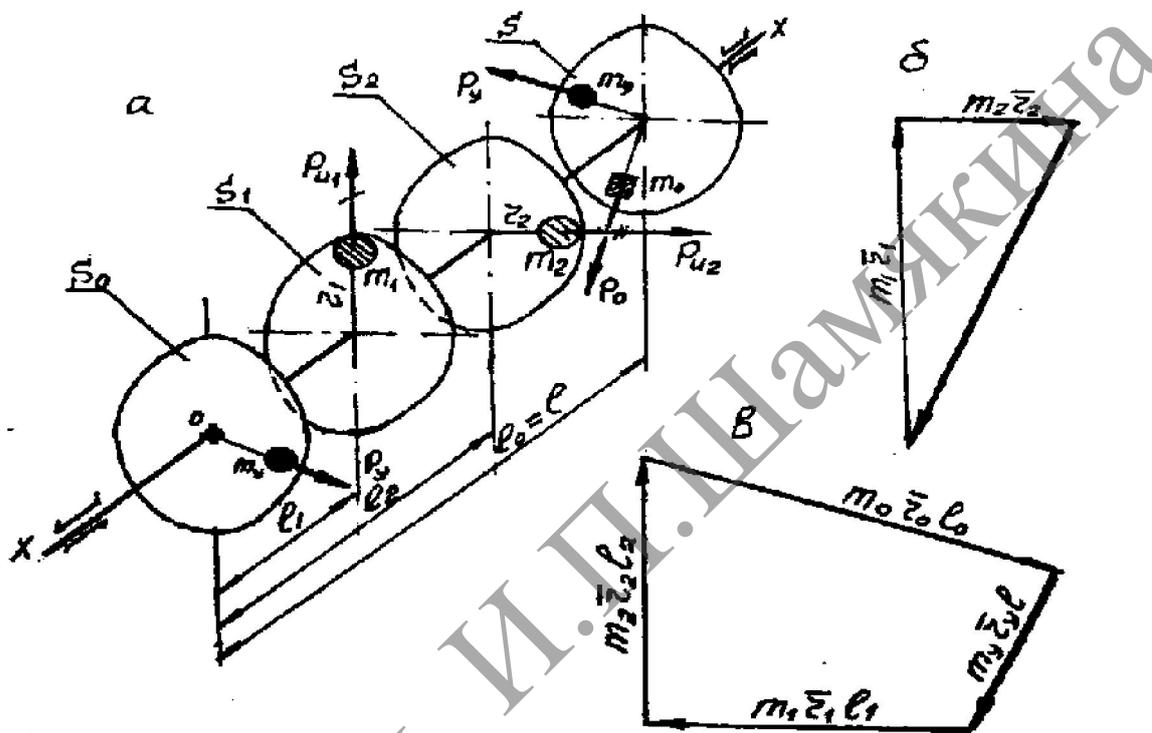


Рисунок 8.4 – К уравновешиванию масс, вращающихся в параллельных плоскостях

Величины моментов сил относительно точки O , расположенной на оси вращения в плоскости переднего торца ротора, будут равны:

$$M_{u1} = P_{u1} l_1 = m_1 \omega^2 r_1 l_1;$$

$$M_{u2} = P_{u2} l_2 = m_2 \omega^2 r_2 l_2;$$

$$M_0 = P_0 l_0 = m_0 \omega^2 r_0 l_0.$$

На рисунке 8.4, в представлен план моментов сил в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Если моменты M_{u1} , M_{u2} , M_0 не образуют на плане замкнутый многоугольник, необходимо ввести еще один противовес – массу m_y , уравновешивающую главный момент сил инерции. Замыкающее звено многоугольника моментов даст направление радиуса,

на котором необходимо разместить уравнивающую массу. Установим её также в плоскости S . Тогда уравнивающий момент:

$$M_y = P_y l_0 = m_y \omega^2 r_y l_0.$$

Из уравнения равновесия для моментов:

$$m_1 r_1 l_1 + m_2 r_2 l_2 + m_0 r_0 l_0 + m_y r_y l_0 = 0 \quad (8.4)$$

Величину $m_y r_y l_0$ определим из многоугольника моментов в масштабе, зададимся r_y и определим m_y .

После того как мы установим в плоскости S уравнивающую массу m_y , статическое равновесие снова нарушится, т.к. добавится дополнительный статический момент $m_y r_y$. Чтобы его уравновесить, понадобится еще один противовес, дающий статический момент, равный по величине и противоположный по знаку. Чтобы введение последнего не нарушило условие равновесия для моментов, его нужно расположить в плоскости S_0 . Тогда момент силы инерции от нового противовеса относительно точки O будет равен 0 и сумма (8.4) не изменится.

Динамическая балансировка

Вследствие погрешностей изготовления, неточности монтажа, неоднородности материала и т.п. правильно спроектированная с точки зрения уравнивания деталь все же может иметь некоторую неуравновешенность. Поэтому необходимо произвести полное уравнивание опытным путем. Производится это на балансировочных машинах различного типа. В подавляющем большинстве этих машин используется один и тот же принцип замены центробежных сил инерции балансируемой детали (ротор, барабан и т.п.) системой двух перекрещивающихся сил – крестом сил; плоскости действия этих сил могут быть выбраны произвольно. Одна из таких машин представлена на рисунке 8.5.

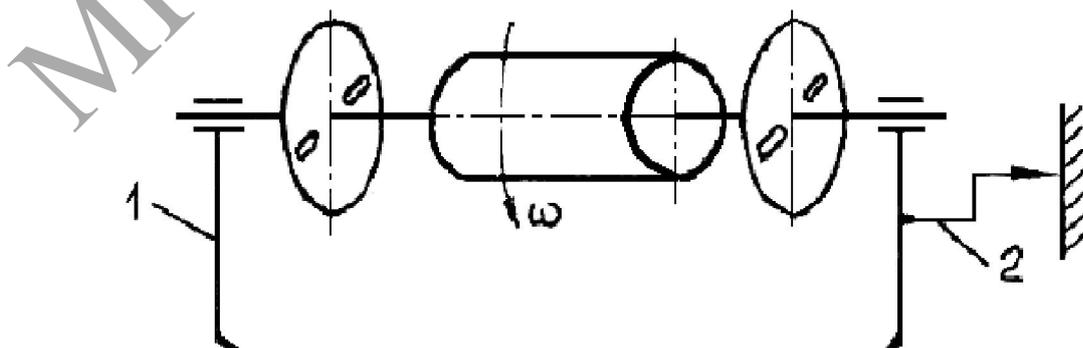


Рисунок 8.5 – К динамической балансировке

Опоры осей ротора расположены в раме l , имеющей горизонтальную ось вращения O . В правой части рама соединена с пружиной, являющейся для него упругой опорой. При помощи фрикционной передачи разгоняют ротор, затем отводят ролик, и ротор переходит в режим свободного выбега. В момент совпадения угловой скорости ротора с частотой собственных колебаний установки наступает резонанс. Фиксирующее устройство 2 (острие стрелки и т. п.) запишет амплитуду колебаний – так работает балансировочный станок. Чтобы им отбалансировать, необходимо выделить балансировочную плоскость I – балансирующее кольцо на поверхности вала. Это кольцо разбивают (мелом) на некоторое количество частей. Затем последовательно в каждой точке деления прикрепляют балансирующий груз (пластилин, например) и находят для него нужное положение по минимуму резонансной амплитуды. Когда нужное положение нашли, можно с противоположной стороны снять лишний металл.

Пример решения задач

Пример 1: уравновесить две вращающиеся массы (рисунок 8.6) весом $G_1 = G_2 = 10$ Н, расположенные под углом $\alpha_1 = 90^\circ$ друг относительно друга, двумя массами в плоскостях I и II, если расстояния до центров тяжести заданных и искомых масс

$$r_1 = r_2 = r_I = r_{II} = 0,1 \text{ м};$$

расстояния от плоскости вращения масс до плоскости I: $l_1 = 0,2$ м, $l_2 = 0,6$ м и $l_{II} = 0,4$ м; до плоскости II: $b_1 = b_2 = 0,2$ м и $b_I = 0,4$ м.

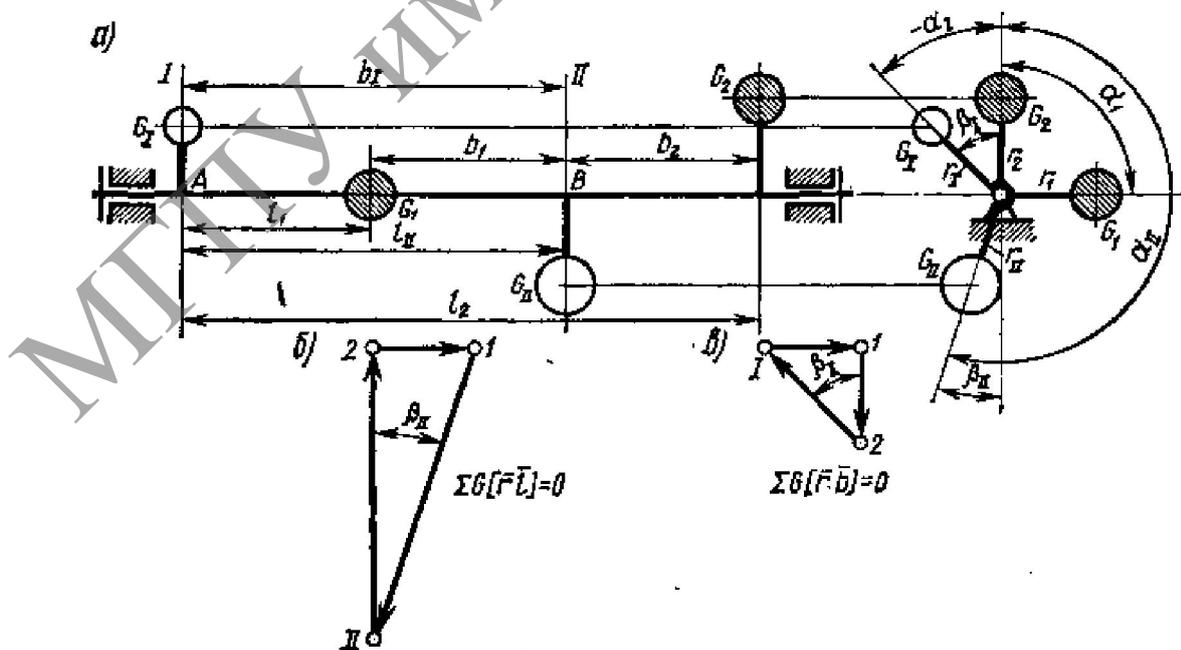


Рисунок 8.6 – Векторный многоугольник

Решение: строим векторный многоугольник (рисунок 8.6, б), пропорциональный центробежным моментам инерции, на основании векторного уравнения

$$\Sigma G[\bar{r} \cdot \bar{l}] = G_1[\bar{r}_1 \cdot \bar{l}_1] + G_2[\bar{r}_2 \cdot \bar{l}_2] + G_{II}[\bar{r}_{II} \cdot \bar{l}_{II}] = 0.$$

Векторы $G[\bar{r} \cdot \bar{l}]$ в плане направлены по центробежным силам инерции. Из плана определяем

$$\sqrt{(G_1 r_1 l_1)^2 + (G_2 r_2 l_2)^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,6^2} = 0,632 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

откуда

$$G_{II} r_{II} = G_{II} r_{II} l_{II} / l_{II} = 0,632 / 0,4 = 1,58 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

тогда вес противовеса

$$G_{II} = 1,58 / 0,1 = 15,8 \text{ Н}.$$

Угол закрепления противовеса

$$\text{tg} \beta_{II} = G_1 r_1 l_1 / (G_2 r_2 l_2) = 0,2 / 0,6 = 0,333.$$

Строим векторный многоугольник, пропорциональный центробежным моментам инерции, на основании векторного уравнения

$$\Sigma G[\bar{r} \cdot \bar{b}] = G_1[\bar{r}_1 \cdot \bar{b}_1] + G_2[\bar{r}_2 \cdot \bar{b}_2] + G_1[\bar{r}_1 \cdot \bar{b}_1] = 0.$$

Векторы $G_1[\bar{r}_1 \cdot \bar{b}_1]$ и $G_1[\bar{r}_1 \cdot \bar{b}_1]$ в плане направлены по центробежным силам инерции, а вектор $G_2[\bar{r}_2 \cdot \bar{b}_2]$ – противоположно центробежной силе инерции.

Из плана

$$G_1 r_1 b_1 = \sqrt{(G_1 r_1 b_1)^2 + (G_2 r_2 b_2)^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2} = 0,283 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

откуда

$$G_1 r_1 = G_1 r_1 b_1 / b_1 = 0,283 / 0,4 = 0,71 \text{ Н} \cdot \text{н},$$

тогда вес противовеса

$$G_1 = 0,71 / 0,1 = 7,1 \text{ Н}.$$

Угол постановки противовеса (рисунок 8.6, а, б)

$$\operatorname{tg} \beta_1 = G_1 r_1 b_1 / (G_2 r_2 b_2) = 0,2/0,2 = 1; \quad \beta = 45^\circ \cdot \alpha_1 = 360^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

или

$$\alpha_1 = -45^\circ.$$

Решение задачи записано в таблице:

№ масс	G, Н	r, м	l, м	Gr, м	Grl, м	α	b, м	Grb, Н·м ²
1	10,0	0,1	0,2	1,00	0,200	90°	0,02	0,200
2	10,0	0,1	0,6	1,00	0,600	0	0,2	0,200
3	7,1	0,1	0	0,71	0	-45°	0,4	0,283
4	15,8	0,1	0,4	1,58	0,632	198° 25'	0	0

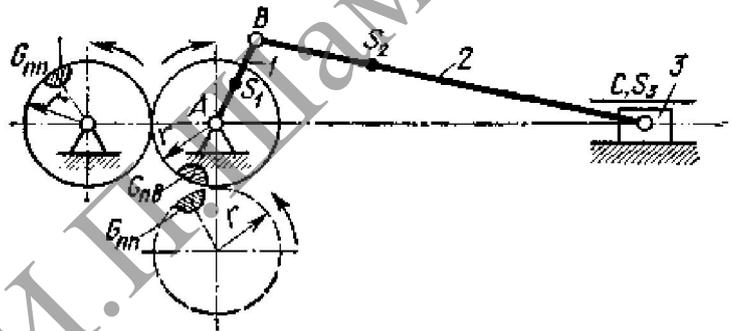
Пример 2: основные размеры звеньев кривошипно-ползунного механизма: $l_{AB} = 0,2$ м; $l_{CB} = 0,8$ м;

$l_{AS_1} = l_{BS_1} = 0,1$ м и $l_{BS_2} = 0,3$ м,

где S_1 и S_2 – центры тяжести звеньев 1 и 2. Центр тяжести звена 3 совпадает с центром C шарнира.

Вес звеньев: $G_1 = 39,2$ Н, $G_2 = 196$ Н и $G_3 = 245$ Н. Уравновесить

силы инерции первого порядка поступательно-движущихся масс и полностью силы инерции вращающихся масс кривошипа AB .

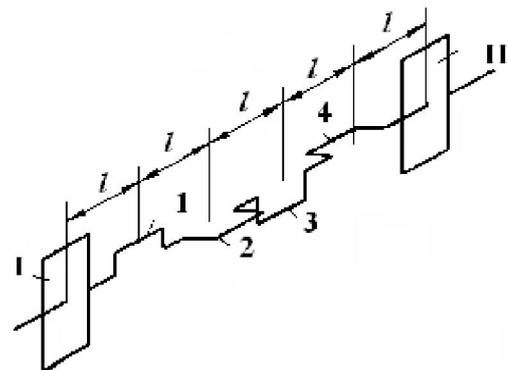


Задания для самостоятельного решения

Задание 1: на ободу уравновешенного диска насажены под углом 60° друг к другу четыре груза G_1, G_2, G_3 и G_4 , имеющие массы $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 30$; $m_3 = 30$ и $m_4 = 20$ кг. Определить массу и положение противовеса, уравновешивающего эти грузы.

Ответ: $m = 50$ кг, противовес должен быть расположен посередине между грузами G_1 и G_4 .

Задание 2: определить положение противовесов в плоскостях I и II, перпендикулярных к оси коленчатого вала четырехцилиндрового двигателя, уравновешивающих четыре колена. Все колена одинаковы и расположены под углом 90° друг к другу, массы противовесов приняты равными неуравновешенным



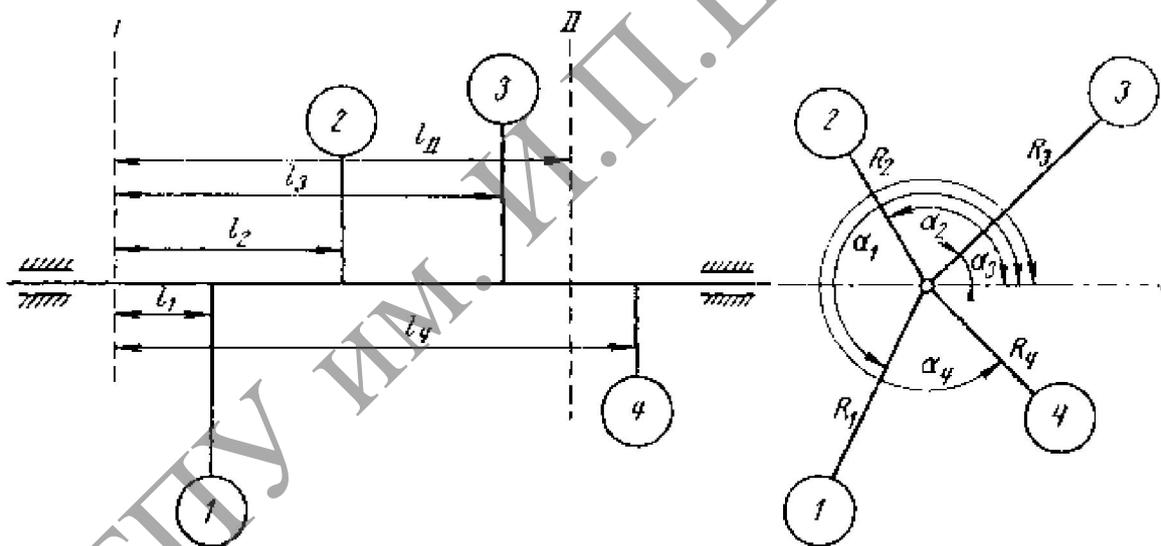
массам m каждого из колен.

Ответ: в плоскости II противовес должен быть расположен под углом 45° к коленам 1 и 2 на расстоянии r_{II} от оси, равно

$$r_{II} = \frac{2\sqrt{2}}{5}r,$$

где r – расстояние от центра тяжести каждой неуравновешенной массы колена до оси. В плоскости I $r_I = -r_{II}$.

Задание 3: на валу закреплены четыре массы, каждая из которых $m = 1$ кг. Расположение масс относительно друг друга. В плоскостях I и II должны быть расположены противовесы, полностью уравнивающие систему, противовесы имеют $m_I = m_{II} = 1$ кг. Определить координаты противовесов $R_I = R_{II}$ $\alpha_I = \alpha_{II}$ следующим данным: $R_1 = 400$ мм, $R_2 = 300$; $R_3 = 420$; $R_4 = 300$; $l_1 = 150$; $l_2 = 350$; $l_3 = 600$; $l_4 = 800$; $l_{II} = 700$ мм; $\alpha_1 = 255^\circ$; $\alpha_2 = 120^\circ$; $\alpha_3 = 45^\circ$; $\alpha_4 = 315^\circ$.



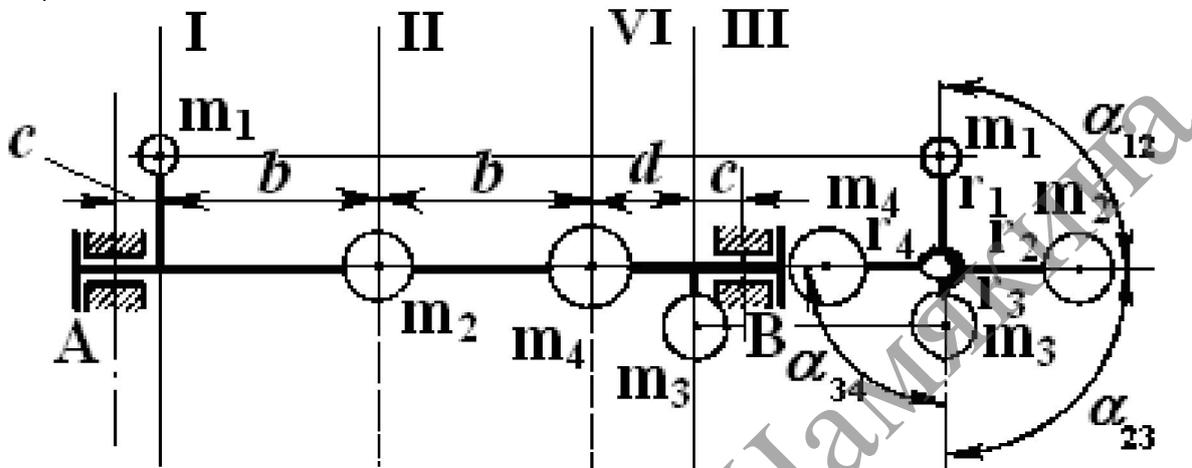
Ответ: $R_I = 230$ мм; $R_{II} = 400$ мм; $\alpha_1 = 25^\circ$; $\alpha_2 = 190^\circ$.

Задание 4: основные размеры звеньев четырехшарнирного механизма: $l_{AB} = 0,2$ м; $l_{BC} = 1$ м; $l_{CD} = 0,8$ м и $l_{AD} = 0,8$ м.

Центры тяжести S_1 , S_2 и S_3 звеньев лежат на середине. Веса звеньев $G_1 = 78,5$ Н; $G_2 = 392$ Н и $G_3 = 294$ Н. Определить массы двух противовесов, расположенных на звеньях AB и CD с целью приближенного уравнивания давлений на фундамент. (Массу звена BC сосредоточить в двух точках B и C .) Радиусы противовесов $r = 0,2$ м.

Ответ: $G_{nAB} = 235,4$ Н; $G_{nCB} = 1\,373$ Н.

Задание 5: массы, закрепленные на вращающемся валу, расположены друг относительно друга и относительно опор вала на расстояниях: $c = 0,05$ м; $b = 0,3$ м; $d = 0,15$ м. Радиусы вращения масс: $r_1 = 0,15$ м; $r_2 = 0,2$ м; $r_3 = 0,1$ м и $r_4 = 0,15$ м. Углы закрепления масс: $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = 90^\circ$. Вес неуравновешенных масс: $G_1 = 981$ Н; $G_2 = 196$ Н; $G_3 = 196$ Н и $G_4 = 245$ Н.



Определить:

- 1) динамические (от сил инерции) и статические (от весов масс) реакции опор вала, если последний делает $n = 1\,200$ об/мин;
- 2) противовес в плоскости I с радиусом $r_I = 0,2$ м при статическом уравнивании масс;
- 3) как изменяются реакции в опорах вала от неуравновешенных инерционных моментов, если противовес для статического уравнивания помещать в последовательном порядке в плоскостях I, II, III и IV;
- 4) противовес в плоскостях I и II с радиусами $r_I = r_{II} = 0,2$ м при динамическом уравнивании масс;
- 5) противовесы в плоскостях III и IV с радиусами $r_{III} = r_{IV} = 0,2$ м при динамическом уравнивании масс; сравнить уравнивающие массы в плоскостях III и IV с уравнивающими массами в плоскостях I и II;
- 6) как статически уравновешенные массы можно с помощью дополнительных масс уравновесить динамически.

Ответ: динамические реакции опор вала: $R_{BD} = 34\,227$ Н; $\alpha_{1B} = 34^\circ 15'$; $R_{AD} = 30\,921$ Н; $\alpha_{3A} = 48^\circ 38'$.

Статические реакции опор вала: $R_{BC} = 458,7$ Н и $R_{AC} = 277$ Н, Статическое уравнивание масс: $G_{cm} = 27,42$ Н; $\alpha_{1I} = 26^\circ 34'$.

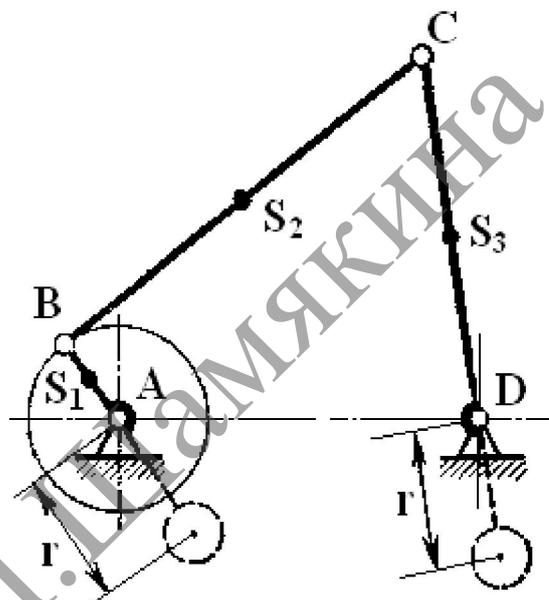
Динамическое уравнивание масс в плоскостях I и II: $G_I = 109,4$ Н; $\alpha_{3I} = 47^\circ 44'$; $C_{II} = 119,7$ Н; $\alpha_{1II} = 35^\circ$. Динамическое уравнивание масс в плоскостях III и IV: $G_{III} = 278,1$ Н; $\alpha_{3III} = 45^\circ$; $G_{IV} = 287,4$ Н; $\alpha_{1I} = 39^\circ 48'$.

Задание 6: определить массу одного противовеса на кривошипе AB , оставляя неуравновешенными силы инерции в вертикальном направлении. Выяснить, каковы максимальные значения этих неуравновешенных сил инерции. Радиус противовеса $r = 0,2$ м.

Задание 7: определить массы двух противовесов на зубчатых колесах для уравнивания сил инерции в вертикальном направлении. Выяснить, каким образом нужно расположить зубчатые колеса друг относительно друга, чтобы уменьшить или вовсе погасить моменты, возникающие как от горизонтальных, так и от вертикальных составляющих сил инерции обоих противовесов. Радиусы противовесов $r = 0,2$ м.

Ответ: для уравнивания вращательных масс $G_{ПВ} = 142,2$ Н; поступательных масс $G_{ПП} = 318,8$ Н.

Максимальное значение неуравновешенных сил инерции будет при вертикальном расположении кривошипа AB : $P_{IV} = G_{ПП} r \omega^2 / g = 6,5 \omega^2$ Н.



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ И ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учеб. / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 635 с.

2. Машков, А. А. Теория механизмов и машин : учеб. / А. А. Машков. – Минск : Выш. шк., 1981. – 469 с.

3. Теория механизмов и машин : учеб. / В. Ф. Фролов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1987. – 495 с.

4. Юдин, В. А. Сборник задач по теории механизмов и машин / В. А. Юдин, Г. А. Барсов, Ю. Н. Чупин. – М. : Высш. шк., 1982. – 215 с.